Министерство образования Республики Башкортостан

ГАОУ СПО Стерлитамакский колледж строительства, экономики и права

Учебно-методический комплекс по дисциплине

ЕН 03. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

основной профессиональной образовательной программы (ОПОП)
по специальности СПО
230115 Программирование в компьютерных системах
базовой подготовки

Разработала : ДОЛГИХ Е.А.

2013

Одобрено на заседании предметно-цикловой комиссии специальности 230115 Программирование в компьютерных системах

Протокол №________________

от «___»_______2013г.

Председатель ПЦК

_____________________/О.А.Комиссарова/

УТВЕРЖДАЮ

Зав. методическим кабинетом

ГАОУ СПО СКСЭиП

__________ /Н.Б. Дубанова/

«___»___2013г.

Учебно-методический комплекс по дисциплине ЕН03 «Теория вероятностей и математическая статистика» для специальности 230115 Программирование в компьютерных системах

Составила	Е.А.Долгих	Преподаватель математики и информатики ГАОУ СПО Стерлитамакский колледж строительства, экономики и права
Рецензенты	С.С.Салаватова	К.п.н., профессор, профессор кафедры алгебры, геометрии и методики обучения математике физико-математического факультета Стерлитамакского филиала БашГУ
	О.А.Комиссарова	Председатель предметно-цикловой комиссии специальности 230115 Программирование в компьютерных системах ГАОУ СПО Стерлитамакский колледж строительства, экономики и права

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» является дисциплиной математического и общего естественнонаучного цикла, входящей в основную профессиональную образовательную программу в соответствии с ФГОС по специальности 230115 Программирование в компьютерных системах, входящей в состав укрупненной группы специальностей СПО 230000 Информатика и вычислительная техника.

Курс “Теория вероятностей и математическая статистика” является базой для изучения дисциплин общепрофессионального цикла «Технические средства информатизации», «Информационная безопасность» и профессионально модуля ПМ01 Разработка программных модулей программного обеспечения компьютерных систем, представляет целостную систему знаний в области математических методов и информационных технологий, необходимую современному специалисту в области программирования компьютерных систем.

Предмет курса - вероятностные закономерности, возникающие при взаимодействии большого числа случайных факторов массовых однородных случайных явлений в науке и жизни общества, а также математические методы систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов.

Цель курса – изучение основных теоретических положений теории вероятностей и математической статистики и применение их к решению прикладных задач. Изучение курса поможет в формировании логического мышления, в более строгом рассмотрении социально-экономических закономерностей.

Математическая учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» содержат математические основы и математические методы, формирующие у студентов – программистов профессиональную культуру и специальное вероятностно-статистическое мышление, необходимое для успешной исследовательской и аналитической работы в современных областях информационных и компьютерных технологий. Задачей учебной дисциплины является введение обучающихся в методологию, подходы, математические методы анализа явлений и процессов в условиях неопределенности. Учебная дисциплина имеет прикладную направленность, что реализуется через рассмотрение конкретных математических и прикладных моделей анализа, иллюстрирующих теоретическое содержание программы дисциплины. Приводится большое количество заданий различной сложности, предназначенных как для текущего, промежуточного и итогового контроля знаний, так и для начальной исследовательской работы по проблематике теории вероятностей и математической статистики в информационных исследованиях. Обеспеченность дисциплины учебной литературой позволяет стимулировать самостоятельную работу студентов, существенно увеличивая, тем самым, реальный охват рассматриваемой проблематики. Материал учебной дисциплины предназначен для дальнейшего использования, прежде всего, в математическом моделировании, в учебных курсах, посвященных построению и оцениванию компьютерных сетей и технологий.

Приводимые в курсе примеры не только разъясняют общие положения теории, но и указывают на связь этих положений с информационно-техническими проблемами, дают указания на приложения общетеоретических результатов, развивают умение применять эти результаты в конкретных задачах, например, таких как контроль качества и работоспособности программных продуктов, организация информационной безопасности в компьютерных сетях.

Методы математико-статистического анализа, имитационного моделирования, теории выбора и принятия решения находят применение при решении разнообразных прикладных проблем.

Широко внедряется вычислительная техника, благодаря которой существенно расширяются возможности успешного применения теории вероятностей и математической статистики при решении конкретных задач.

Учебно-методический комплекс учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» предназначен для преподавателей математических дисциплин укрупненной группы специальностей 230000 Информатика и вычислительная техника

РАЗДЕЛ 1 РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Примерная программа учебной дисциплины разработана на основе Федерального государственного образовательного стандарта по специальности среднего профессионального образования **230115 Программирование в компьютерных системах** (укрупненная группа специальностей 230000 Информатика и вычислительная техника)

Организация-разработчик: ГАОУ СПО Стерлитамакский колледж строительства, экономики и права

Разработчик: Долгих Е.А, преподаватель высшей категории

Утверждена республиканским экспертным советом по профессиональному образованию ГОУ РУНМЦ РБ, секция СПО (протокол №3/11 от 30.06.2011г.)

1. ПАСПОРТ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН 03 Теория вероятностей и математическая статистика

1.1. Область применения программы

Рабочая программа учебной дисциплины является частью основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС по специальности **230115 Программирование в компьютерных системах**, входящей в состав укрупненной группы специальностей СПО **230000 Информатика и вычислительная техника** и может быть использована в дополнительном профессиональном образовании в рамках реализации программ переподготовки кадров в учреждениях СПО.

1.2. Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы:

дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» является дисциплиной является дисциплиной математического и общего естественнонаучного цикла.

1.3. Цели и задачи дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины:

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **уметь**:

- применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач;
- пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач;
- применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **знать**:

- основные понятия комбинаторики;
- основы теории вероятностей и математической статистики;
- основные понятия теории графов

1.4. Рекомендуемое количество часов на освоение программы дисциплины:

максимальной учебной нагрузки обучающегося **105** часов,
в том числе:
обязательной аудиторной учебной нагрузки обучающегося **70** часов;
самостоятельной работы обучающегося **35** часов.

2. СТРУКТУРА И ПРИМЕРНОЕ СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН 03Теория вероятностей и математическая статистика

2.1. Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Объем часов
Максимальная учебная нагрузка (всего)	***105***
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	***70***
в том числе:	
лабораторные занятия	*10*
практические занятия	*10*
контрольные работы	*6*
Самостоятельная работа обучающегося (всего)	***35***
в том числе: 1. Реферирование темы Жизнеописание Я.Бернулли. Байес и его вклад в теорию вероятностей. История возникновения и развития теории вероятностей. Необычные области применения математической статистики. Виды распределений случайных величин. Статистические оценки параметров распределения и их приложения. Метод статистических испытаний и его применение. Вклад наших соотечественников в развитие теории вероятностей как науки. Мир, построенный на вероятности. П. Лаплас и его вклад в развитие теории вероятностей. С. Пуассон и его вклад в развитие теории вероятностей. Муавр и его вклад в развитие теории вероятностей. К Гаусс и его метод наименьших квадратов. Петербургская математическая школа и ее вклад в развитие ТВ. Развитие теории вероятностей в XXI веке. 2. Выполнение упражнений на закрепление материала 3. Моделирование и решение вероятностных задач 4. Аналитический обзор литературы определенной тематики 5. Составление сводной таблицы «Виды вариационных рядов»	 *10* *14* *5* *5* *1*
Итоговая аттестация в форме ***экзамена***	

2.2. Примерный тематический план и содержание учебной дисциплины
ЕН 03Теория вероятностей и математическая статистика

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, лабораторные и практические работы, самостоятельная работа обучающихся	Объем часов	Уровень освоения
1	2	3	4
Раздел 1.Элементы комбинаторики		**6**	
Тема 1.1. Использование элементов комбинаторики в решении задач	**Содержание учебного материала**	4	
	1 Предмет и метод теории вероятностей. Основные формулы комбинаторики (ОК 1)		1
	2 Использование элементов комбинаторики в решении задач (ОК 2.1.1, ОК 3.1.1)		1
	Самостоятельная работа обучающихся	2	
	1. Моделирование комбинаторной задачи (ОК 3.1.1)		
	2. Решение комбинаторныхзадач (ОК 2.1.1)		
	3 Реферирование на тему «История возникновения и развития теории вероятностей» (ОК 4.2.1)		
Раздел 2 Основы теории вероятностей		**27**	
Тема 2.1. Случайные события.	**Содержание учебного материала**	4	
	1 Случайные события. Классическое определение вероятности события		1
	2 Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности (ОК 2.1.1, 3.1.1)		2
	Самостоятельная работа обучающихся	2	
	1. Моделирование вероятностной задачи (ОК 3.1.)		
	2. Решение вероятностных задач (ОК 2.1.1)		
	3 Реферирование на тему «Развитие теории вероятностей в XXI веке» (ОК 4.2.1)		
Тема 2.2. Вероятности сложных событий	**Содержание учебного материала**	4	
	1 Теоремы сложения и умножения вероятностей		1
	2 Формула полной вероятности и формула Байеса (ОК 2.1.1)		2
	Практические занятия	2	
	1 Вычисление вероятностей сложных событий с использованием формул сложения и умножения вероятностей (ОК 2.1.1)		
	Самостоятельная работа обучающихся	3	
	1. Моделирование вероятностной задачи для сложных событий (ОК 3.1.1)		
	2. Решение вероятностных задач с использованием теорем (ОК 2.1.1)		
	3 Реферирование темы «Жизнеописание Байеса» (ОК 4.2.1)		
Тема 2.3. Схема Бернулли	**Содержание учебного материала**	4	
	1 Формулы Бернулли и Пуассона		2
	2 Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. (ОК 2.1.1)		2
	Практические занятия	2	
	1 Вычисление вероятностей сложных событий с использованием формулы Бернулли и закона редких событий. (ОК 2.1.1)		
	Контрольные работы	2	
	Проверочно-итоговая работа по разделу (ОК 2.1.1)		2
	Самостоятельная работа обучающихся	4	
	1 Моделирование вероятностной задачи по схеме Пуассона (ОК 3.1.1)		
	2 Решение вероятностных задач по схеме Бернулли (ОК 2.1.1)		

Наименование разделов и тем		Содержание учебного материала, лабораторные и практические работы, самостоятельная работа обучающихся	Объем часов	Уровень освоения
1		2	3	4
	3	Реферирование тем «Жизнеописание Я.Бернулли», «П.Лаплас и его вклад в развитие теории вероятностей», (ОК 4.2.1)		
Раздел 3. Дискретные случайные величины (ДСВ)			**21**	
Тема 3.1. Понятие ДСВ. Распределение ДСВ. Функции от ДСВ		**Содержание учебного материала**	2	
	1	Закон распределения вероятностей случайной величины. Способы задания закона распределения ДСВ		1
		Практические занятия	2	
	1	Решение задач на запись распределения ДСВ (ОК 2.1.1)		
		Самостоятельная работа обучающихся	2	
	1	Моделирование вероятностной задачи для ДСВ (ОК 3.1.1)		
	2	Решение вероятностных задач для ДСВ (ОК 2.1.1)		
	3	Реферирование темы «Вклад наших соотечественников в развитие теории вероятностей как науки.» (ОК4.2.1)		
Тема 3.2. Характеристики ДСВ и их свойства		**Содержание учебного материала**	2	
	1	Математическое ожидание и дисперсия ДСВ, их свойства.		1
		Практические занятия	2	
	1	Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины (ОК 2.1.1)		
		Самостоятельная работа обучающихся	2	
		Выполнение упражнений на закрепление материала по теме «Характеристики ДСВ» (ОК 2.1.1)		
Тема 3.3. Виды распределений ДСВ		**Содержание учебного материала**	4	
	1	Виды распределений ДСВ		1
	2	Формулы для вычисления характеристик ДСВ для различных видов распределений (ОК 2.1.1)		2
		Контрольные работы	2	
		Проверочно-итоговое занятие по разделу (ОК 3.1.1)		2
		Самостоятельная работа обучающихся	3	
	1	Моделирование вероятностной задачи (ОК 2.1.1)		
	2	Решение вероятностных задач для различных видов распределений ДСВ (ОК 3.1.1)		
	3	Реферирование темы «Виды распределений случайных величин» (ОК 4.2.1)		
Раздел 4. Непрерывные случайные величины (НСВ)			**21**	
Тема 4.1. Понятие НСВ.		**Содержание учебного материала**	2	
	1	Понятие НСВ, плотности распределения НСВ.		1
		Практические занятия	2	
	1	Решение задач на вычисление вероятности НСВ (ОК 3.1.1)		
		Самостоятельная работа обучающихся	2	
		Выполнение упражнений на закрепление материала по теме «НСВ» (ОК 3.1.1)		
Тема 4.2. Характеристики НСВ		**Содержание учебного материала**	4	
	1	Характеристики НСВ, их свойства		1
	2	Формулы для вычисления характеристик НСВ (ОК 2.1.1)		2
		Самостоятельная работа обучающихся	2	
	1	Моделирование вероятностной задачи на поиск характеристик НСВ (ОК 3.1.1)		

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, лабораторные и практические работы, самостоятельная работа обучающихся		Объем часов	Уровень освоения
1	2		3	4
	2	Решение вероятностных задач на нахождение числовых характеристик НСВ (ОК 2.1.1)		
	3	Реферирование темы «Мир, построенный на вероятности» (ОК 4.2.2)		
Тема 4.3. Виды распределений НСВ	**Содержание учебного материала**		4	
	1	Виды распределений НСВ, их свойства		1
	2	Вычисление вероятностей сложных событий с использованием законов распределения НСВ (ОК 2.1.1)		2
	Контрольные работы		2	
	Проверочно-итоговое занятие по разделу (ОК 3.1.1)			2
	Самостоятельная работа обучающихся		3	
	Выполнение упражнений на закрепление материала по тематике очередного практического занятия (ОК 2.1.1)			
Раздел 5. Предельные теоремы теории вероятностей			**6**	
Тема 5.1. Предельные теоремы теории вероятностей	**Содержание учебного материала**		2	
	1	Центральная предельная теорема. Закон больших чисел.		1
	Лабораторные занятия		2	
	1	Проверка гипотезы о законе распределения экспериментальных данных (ОК 2.1.1)		
	Самостоятельная работа обучающихся		2	
	1	Моделирование вероятностной задачи подтверждения гипотезы больших чисел (ОК 3.1.1, ОК 6.1.2)		
	2	Решение вероятностных задач с использованием предельных теорем (ОК 2.1.1)		
	3	Реферирование темы «Необычные области применения математической статистики» (ОК 4.2.1)		
Раздел 6. Введение в математическую статистику			**24**	
Тема 6.1. Теория оценивания параметров	**Содержание учебного материала**		6	
	1	Предмет и метод математической статистики (ОК 1).		1
	2	Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.		1
	3	Точечные и интервальные оценки		2
	Лабораторные работы		6	
	1	Изучение методов обработки экспериментальных статистических данных (ОК 3.1.1, ОК 6.1.2)		
	2	Исследование различных законов распределения (ОК 3.1.1, ОК 6.1.2)		
	3	Вычисление выборочных характеристик и доверительных интервалов (ОК 2.1.1, ОК 5))		
	Самостоятельная работа обучающихся		6	
	1	Составление сравнительной таблицы «Виды вариационных рядов» (ОК 3.1.2)		
	2	Реферирование темы «Статистические оценки параметров распределения и их приложения» (ОК 4.1.1)		
Тема 6.2 Моделирование случайных величин. Метод статистических испытаний	**Содержание учебного материала**		2	
	1	Моделирование случайных величин с помощью физических экспериментов.		1
	Лабораторные работы		2	
	1	Применение метода статистических испытаний (ОК 3.1.1, ОК 6.1.2)		
	Самостоятельная работа обучающихся		2	
	Выполнение упражнений на закрепление материала по теме «Метод статистических испытаний» (ОК 2.1.1)			
		Всего:	**105**	

3. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН 03 Теория вероятностей и математическая статистика

3.1. Требования к минимальному материально-техническому обеспечению

Реализация программы дисциплины требует наличия учебного кабинета математических дисциплин», полигона вычислительной техники.

Оборудование учебного кабинета и рабочих мест кабинета:

- посадочные места по количеству обучающихся;
- рабочее место преподавателя;
- комплект учебно-методической документации;
- комплект наглядных пособий и макетов по дисциплине;
- доска для записей;

Оборудование полигона:

- рабочие места с персональным компьютером по количеству обучающихся;
- рабочее место преподавателя

Технические средства обучения:

- точки электропитания для подключения ПК;
- мультимедийное оборудование;
- широкоформатный экран;
- источники бесперебойного питания;
- интерактивная доска

3.2. Информационное обеспечение обучения

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика М.:Высшая школа, 2007. – 480 с
2. Максимова О.В. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб.пособие для студентов ССУЗ – 2 изд. – М.: «Дашков и К», 2007, 320 с.
3. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений СПО / М.С. Спирина, П.А.Спирин. – М.: «Академия»,2007,352с

Дополнительные источники:

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей учебное пособие для ССУЗ. - М.: Академия, 2003, 332 с
2. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Задачи и упражнения по теории вероятностей - М.: Академия, 2005. - 448 с.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика - М., Высш.шк., 2003.- 479 с.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М., Высш.шк., 2004.- 404 с.
5. Калинина В.Н. Математическая статистика: Учеб. для студ. сред. спец. учеб. заведений. / Калинина В.Н., Панкин В.Ф. – 3-е изд., испр. –М: Высш. шк., 2001. – 336 с.
6. Кочетков В. Теория вероятностей и математическая статистика учебное пособие для ССУЗ. - М.: ФОРУМ - ИНФРА - М, 2003, 404 с.
7. Теория вероятностей в задачах и упражнениях / Е. С. Кочетков, С. О. Смерчинская. - Москва : Форум - Инфра-М, 2005. - 479 с.

Интернет – ресурсы:

1. http://www.intuit.ru/department/mathematics/intprobtheory/
2. http://www.intuit.ru/department/mathematics/appstat/
3. http://www.intuit.ru/department/economics/basicstat/
4. http://www.matburo.ru/st_subject.php?p=tv

5. http://teorver-online.narod.ru/tvms-i.html
6. http://www.pm298.ru/verstat.php
7. http://www.uchites.ru/tvims/bazovyi_kurs

4. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Контроль и оценка результатов освоения дисциплины осуществляется преподавателем в процессе проведения практических занятий и лабораторных работ, тестирования, а также выполнения обучающимися индивидуальных заданий, проектов, исследований.

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	**Формы и методы контроля и оценки результатов обучения**
В результате освоения дисциплины обучающийся должен **уметь**:	
применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач	Оценка результатов стандартизованного тестирования сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) на лабораторном занятии Оценка продукта учебной деятельности (решённой вероятностной и статистической задачи) по критериям (использование соответствующей модели, соответствующего алгоритма, отсутствие расчётных ошибок) на экзамене
пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач	Оценка продукта учебной деятельности (решённой статистической задачи) по критериям (использование соответствующего алгоритма, отсутствие расчётных ошибок) на практическом занятии
применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.	Оценка правильности построения компьютерной модели статистической задачи на лабораторном занятии Оценка продукта учебной деятельности (решённой статистической задачи) по критериям (использование соответствующего алгоритма, отсутствие расчётных ошибок) на лабораторном, практическом занятии
В результате освоения дисциплины обучающийся должен **знать**:	
основные понятия комбинаторики;	Оценка результатов стандартизованного тестирования сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) по основным понятиям комбинаторики на экзамене
основы теории вероятностей и математической статистики;	Оценка результатов стандартизованного тестирования сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) по основным понятиям теории вероятностей и математической статистики на экзамене Оценка продукта учебной деятельности (реферата) по критериям на практическом занятии Оценка качества заполнения сравнительной таблицы «Виды вариационных рядов» по критериям на практическом занятии
основы математической статистики	Оценка результатов стандартизованного тестирования сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) по основным понятиям математической статистики на практическом занятии Оценка продукта учебной деятельности (реферата) по критериям на практической работе
основные понятия теории графов	Оценка результатов стандартизованного тестирования сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) по основным понятиям теории графов на практическом занятии

ПРИЛОЖЕНИЕ
к таблице 4 КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	Основные показатели результатов подготовки	Формы и методы контроля и оценки результатов обучения
В результате освоения дисциплины обучающийся должен **уметь**:		
применять стандартные методы и модели к решению комбинаторных задач;	Модель задачи составлена в соответствии с методическими рекомендациями Задача решена с использованием соответствующего алгоритма, расчетные ошибки отсутствуют	Оценка результатов стандартизованного тестирования сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) на лабораторном занятии Оценка продукта учебной деятельности (решённой комбинаторной задачи) по критериям (использование соответствующей модели, соответствующего алгоритма, отсутствие расчётных ошибок) на экзамене
применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач;	Задача решена с использованием соответствующего алгоритма, расчетные ошибки отсутствуют	Оценка правильности моделирования вероятностной задачи сопоставлением с модельным ответом на практическом, занятии Оценка результатов стандартизованного тестирования сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) на лабораторном занятии Оценка продукта учебной деятельности (решённой вероятностной задачи) по критериям (использование соответствующего алгоритма, отсутствие расчётных ошибок) на экзамене
применять стандартные методы и модели к решению статистических задач;	Задача решена с использованием соответствующего алгоритма, расчетные ошибки отсутствуют	Оценка результатов стандартизованного тестирования сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) на лабораторном занятии Оценка правильности моделирования статистической задачи сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) на лабораторном занятии Оценка продукта учебной деятельности (решённой статистической задачи) по критериям (использование соответствующего алгоритма, отсутствие расчётных ошибок) на практическом занятии
пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении вероятностных задач;	Задача решена с использованием соответствующего алгоритма, расчетные ошибки отсутствуют	Оценка продукта учебной деятельности (решённой вероятностной задачи) по критериям (использование соответствующего алгоритма, отсутствие расчётных ошибок) на практическом занятии
пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач;	Задача решена с использованием соответствующего алгоритма, расчетные ошибки отсутствуют	Оценка продукта учебной деятельности (решённой статистической задачи) по критериям (использование соответствующего алгоритма, отсутствие расчётных ошибок) на лабораторном занятии
применять современные пакеты прикладных	Задача решена с использованием	Оценка правильности построения компьютерной модели вероятностной

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	Основные показатели результатов подготовки	Формы и методы контроля и оценки результатов обучения
программ для решения вероятностных задач	соответствующего алгоритма, расчетные ошибки отсутствуют	задачи на лабораторном занятии Оценка продукта учебной деятельности (решённой вероятностной задачи) по критериям (использование соответствующего алгоритма, отсутствие расчётных ошибок) на лабораторном занятии
применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.	Использует прикладные программы, установленные в ОУ, для построения компьютерной модели статистической задачи Задача решена с использованием соответствующего алгоритма, расчетные ошибки отсутствуют	Оценка правильности построения компьютерной модели статистической задачи на лабораторном занятии Оценка продукта учебной деятельности (решённой статистической задачи) по критериям (использование соответствующего алгоритма, отсутствие расчётных ошибок) на лабораторном занятии
В результате освоения дисциплины обучающийся должен **знать**:		
основные понятия комбинаторики;	Формулирует основные понятия комбинаторики Воспроизводит формулы для вычисления числа комбинаций для сочетаний размещений перестановок	Оценка результатов стандартизованного тестирования сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) по основным понятиям комбинаторики на экзамене
основы теории вероятностей	Формулирует основные понятия теории вероятностей Воспроизводит формулы для вычисления вероятностей : простых событий сложных событий Воспроизводит формулы для вычисления характеристик случайных величин	Оценка результатов стандартизованного тестирования сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) по основным понятиям теории вероятностей на экзамене Оценка продукта учебной деятельности (реферата) по критериям на практическом занятии
основы математической статистики	Формулирует основные понятия математической статистики Воспроизводит формулы многомерного статистического анализа	Оценка результатов стандартизованного тестирования сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) по основным понятиям математической статистики на экзамене Оценка качества заполнения сравнительной таблицы «Виды вариационных рядов» по критериям на практическом занятии Оценка продукта учебной деятельности (реферата) по критериям на практическом занятии
основные понятия теории графов	Формулирует основные понятия теории графов	Оценка результатов стандартизованного тестирования сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) по основным понятиям теории графов на практическом занятии

РАЗДЕЛ 2. КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН 03 Теория вероятностей и математическая статистика

№	*Наименование разделов, тем*	*Кол. час.*	*Дата*	*№ занятия*	*Вид занятия*	*Оборудование занятия*	*Самостоятельная работа студентов*	*Дом. задание*	*Примеч.*
	Раздел 1 . Элементы комбинаторики								
Тема 1.1. Использование элементов комбинаторики в решении задач									
	Знакомство с видами контроля по УД. Предмет и метод теории вероятностей. Основные формулы комбинаторики	2		1	теор	Кабинет матем. дисциплин	Моделирование комбинаторной задач [10], №1-4,6(а,б,г),7	[3], стр 7-19 Решение задач	[9], с.3-7 [10], № 5,6 (в,д)
	Использование элементов комбинаторики в решении задач	2		2	теор	Кабинет матем.	Решение комбинаторных задач №16,17,19	Реферирование на тему «История возникновения и развития теории вероятностей»	[7], с.10-13 [8], № 15,18
	Раздел 2. Основы теории вероятностей								
Тема 2.1. Случайные события									
	Случайные события. Классическое определение вероятности события	2		3	теор	Кабинет матем. дисциплин	Моделирование вероятностной задачи [10], №9-11,14	Реферирование на тему «Развитие теории вероятностей в XXI веке» [3], стр 31-34 Решение задач.	[9], с.10-13 [10], № 12,13
	Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности	2		4	теор	Кабинет матем. дисциплин	Решение вероятностных задач [10], №16,17,19	[3], стр 31-34 Решение задач.	[9], с.10-13 [10], № 15,18
Тема 2.2. Вероятности сложных событий									
	Теоремы сложения и умножения вероятностей.	2		5	Теор.	Кабинет матем. дисциплин	Моделирование вероятностной задачи для сложных событий [10], №20-23,26	[3], стр 34-48 Решение задач	[9], с.16-19 [10], № 24,25
	Вычисление вероятностей сложных событий с использованием формул сложения и умножения вероятностей	2		6	практ.	Кабинет матем. дисциплин	Решение вероятностных задач с использованием теорем [10], № 28,29,31 (а),32	[3], стр 48-55 Решение задач	[9], с.16-19 [10], № 27,30,31(б)

№	Наименование разделов, тем	Кол. час.	Дата	№ занятия	Вид занятия	Оборудование занятия	Самостоятельная работа студентов	Дом. задание	Примеч.
	Формула полной вероятности и формула Байеса	2		7	теор	Кабинет матем. дисциплин	Решение вероятностных задач с использованием теорем [10], № 33, 35, 37, 39(а)	[3], стр 55-62 Решение задач Реферирование темы «Жизнеописание Байеса»	[9], с.21-23 [10], № 34, 36, 38, 39(б), 40(для вывода ф.Бернулли)
Тема 2.3. Схема Бернулли									
	Формулы Бернулли и Пуассона.	2		8	теор	Кабинет матем. дисциплин	Моделирование вероятностной задачи по схеме Пуассона [10], 40,41,43	[3], стр 62-70 Решение задач	[9], с.25-27 [10], № 42,44
	Вычисление вероятностей сложных событий с использованием формулы Бернулли и закона редких событий (формулы Пуассона).			9	практ	Кабинет матем. дисциплин	Решение вероятностных задач по схеме Бернулли [10], 45,47(а)	[3], стр 62-70 Решение задач	[9], с.25-27 [10], № 46,47(б)
	Локальная и интегральная теоремы Лапласа	2		10	Теор.	Кабинет матем. дисциплин	Решение задач [10], №48,50,52	[3], стр 70-101 Подготовка к пров. работе	[9], с.29-31 [10], № 49,51
	Проверочно-итоговая работа по разделу	2		11	КР	Кабинет матем. дисциплин	*КР (30 вариантов)*	Реферирование тем «Жизнеописание Я.Бернулли», «П.Лаплас и его вклад в развитие теории вероятностей», «Пуассон и его вклад в развитие теории вероятностей»	[9], с.33 [10], список отч. работ (15 вариантов)
	Раздел 3. Дискретные случайные величины (ДСВ)								
Тема 3.1. Понятие ДСВ. Распределение ДСВ. Функции от ДСВ									
	Закон распределения вероятностей случайной величины. Способы задания закона распределения ДСВ	2		12	теор	Кабинет матем. дисциплин	Моделирование вероятностной задачи для ДСВ №53,58	[3], стр 102-106 Решение задач	[9], с.37 [10], № 54,57,59
	Решение задач на запись распределения ДСВ	2		13	практ	Кабинет матем. дисциплин	Решение вероятностных задач для ДСВ [10], № 62,64,66,68,72	[3], стр 102-106 Реферирование темы «Вклад наших соотечественников в развитие теории вероятностей как науки.» Решение задач	[9], с.37 [10], № 63,65,67,69,73

№	Наименование разделов, тем	Кол. час.	Дата	№ занятия	Вид занятия	Оборудование занятия	Самостоятельная работа студентов	Дом. задание	Примеч.
Тема 3.2.. Характеристики ДСВ и их свойства									
	Математическое ожидание и дисперсия ДСВ, их свойства.	2		14	теор.	Кабинет матем. дисциплин	Решение вероятностных задач для ДСВ [10], №81	[3], стр 106-118 Решение задач	[9], с.47-53 [10], №83,84
	Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины	2		15	практ	Кабинет матем. дисциплин	Выполнение упражнений на закрепление материала по теме «Характеристики ДСВ» [10], № 82,86(а)	[3], стр 106-118 Решение задач	[9], с.47-53 [10], № 85, 86(б), 87
Тема 3.3. Виды распределений									
	Виды распределений ДСВ	2		16	теор	Кабинет матем. дисциплин	Моделирование вероятностной задачи [10], № 82,88	[3], стр 118-130 Решение задач.	[9], с.56-60 [10], № 85,86
	Формулы для вычисления характеристик ДСВ для различных видов распределений	2		17	теор	Кабинет матем. дисциплин	Решение вероятностных задач для различных видов распределений ДСВ [10], №87	Подготовка к КР Решение задач	[9], с.56-60 [10], № 88,89
	Проверочно-итоговое занятие по разделу	2		18	КР	Кабинет матем. дисциплин	Решение вероятностных задач для различных видов распределений ДСВ	Реферирование темы «Виды распределений случайных величин»	[9], с.56-60 [10], № 90-93
	Раздел 4. Непрерывные случайные величины (НСВ)								
Тема 4.1. Понятие НСВ									
	Понятие НСВ, плотности распределения НСВ	2		19	теор	Кабинет матем. дисциплин	Выполнение упражнений на закрепление материала по теме «НСВ» [10], №94,95	[3], стр 130-132 Решение задач	[9], с. 64-65 [10], № 96,97
	Решение задач на вычисление вероятности НСВ	2		20	практ	Кабинет матем. дисциплин	Выполнение упражнений на закрепление материала по теме «НСВ» [10],№ 100,101	[3], стр 130-132 Решение задач	[9], с. 64-65 [10], № 102
Тема 4.2. Характеристики НСВ									

№	*Наименование разделов, тем*	*Кол. час.*	*Дата*	*№ занятия*	*Вид заняти*	*Оборудование занятия*	*Самостоятельная работа студентов*	*Дом. задание*	*Примеч.*
	Характеристики НСВ, их свойства	2		21	теор	Кабинет матем. дисциплин	Моделирование вероятностной задачи на поиск характеристик НСВ [10], №103,105,106	[3], стр 132-136 Решение задач	[9], с.71 [10], № 104
	Формулы для вычисления характеристик НСВ	2		22	теор	Кабинет матем. дисциплин	Решение вероятностных задач на нахождение числовых характеристик НСВ [10], № 107,109	[3], стр 132-136 Решение задач Реферирование темы «Мир, построенный на вероятности»	[9], с.71 [10], № 108
Тема 4.3. Виды распределений НСВ									
	Виды распределений НСВ, их свойства	2		23	теор	Кабинет матем. дисциплин	Выполнение упражнений на закрепление материала по тематике очередного практического занятия . [10]№114,116,117,120	[3], стр 136-142 Решение задач	[9], с.79 [10], № 115,118, 119,121
	Вычисление вероятностей сложных событий с использованием законов распределения НСВ. Проверочно-итоговое занятие по разделу	2		24	Теор КР	Кабинет матем. дисциплин	реш. [10], №122,123,124, 126, 129,131	[3], стр 136-146 Решение задач	[9], с.83 [10], № 125,127,128, 130,132
	Раздел 5. Предельные теоремы теории вероятностей								
Тема 5.1. Предельные теоремы теории вероятностей									
	Центральная предельная теорема. Закон больших чисел.	2		25	теор	Кабинет матем. дисциплин	Моделирование вероятностной задачи подтверждения гипотезы больших чисел	[3], стр 148-180 Решение задач.	[9], с.89-93 [10], № 133,134
	Проверка гипотезы о законе распределения экспериментальных данных	2		26	лабор	полигон вычислительной техники	Решение вероятностных задач с использованием предельных теорем	Реферирование темы «Необычные области применения математической статистики»	[9], с.89-93
	Раздел 6. Введение в математическую статистику								
Тема 6.1. Теория оценивания параметров									

№	*Наименование разделов, тем*	*Кол. час.*	*Дата*	*№ заняти*	*Вид заняти*	*Оборудование занятия*	*Самостоятельная работа студентов*	*Дом. задание*	*Примеч.*
	Предмет и метод математической статистики Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.	2		27	Теор.	Кабинет матем. дисциплин	реш. [10], №135-136	[3], стр 181-186 Решение задач	[9], с.107-114 [10], № 137
	Изучение методов обработки экспериментальных статистических данных			28	лабор	полигон вычислительной техники	реш. [10], №138, 139, 140	[3], стр 186-194 Составление сравнительной таблицы «Виды вариационных рядов»	[9], с.117-119 [10], № 141,142
	Точечные и интервальные оценки	2		29	Теор	Кабинет матем. дисциплин	Решение задач [10], №143	[3], стр 194-197 Решение задач	[9], с.117-119 [10], № 144
	Исследование различных законов распределения			30	лабор	полигон вычислительной техники	Реферирование темы «Статистические оценки параметров распределения и их приложения»	[3], стр 197-204 Решение задач	[1], с.162-188 [1], № 9.1
	Вычисление выборочных характеристик и доверительных интервалов			31	лабор	полигон вычислительной техники	решение примеров	[3], стр 204-220 Решение задач	[4], с.188-203
Тема 6.2 Моделирование случайных величин. Метод статистических испытаний									
	Моделирование случайных величин с помощью физических экспериментов.	2		32	Теор	Кабинет матем. дисциплин	Выполнение упражнений на закрепление материала по теме «Метод статистических испытаний»	Изучение конспекта [3], стр 221-236	[1], с.306-312-324 [1], № 1,2,3
	Применение метода статистических испытаний	2		33	лабор	полигон вычислительной техники	Аналитический обзор литературы определенной тематики	[3], стр 236-249	[1], с.306-312,324-329 [1], № 1,2,3

Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	***66***
в том числе:	
лабораторные занятия	*10*
практические занятия	*10*
контрольные работы	*6*

РАЗДЕЛ 3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

План-конспект занятия №1

Знакомство с видами контроля по УД.

Предмет и метод теории вероятностей. Основные формулы комбинаторики

Цель занятия: познакомить с ТВиМС.
Вид занятия: теоретическое занятие
Задачи:
Учебные: 1) Знакомство с видами контроля по УД
2)разъяснить основные задачи и области применения ТВиМС;
3) дать основные понятие комбинаторики;
4) научить решать задачи на расчет количества выборок;
5) пропедевтика понятия геометрической вероятности.
Развивающие:
1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти
Воспитательные:
1) воспитание аккуратности и внимательности

Межпредметные связи:
Математика и Элементы высшей математики;
Логика
Алгоритмизация программирование
Экономика и менеджмент

<u>Ход занятия:</u>

1. Организационный момент 1-3 мин
(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)
2. Объяснение нового материала 60 мин
а) Введение в дисциплину,
б) Элементы комбинаторики
3. Закрепление материала 20 мин
(решение задач №№ **1, 2, 3, 4, 6** (а,б,г), **7**)
4. Подведение итогов занятия. 1-3 мин
5. Домашнее задание: 1-3мин
а) выучить конспект. [3], стр 7-19 , [9], с.3-7
б) решить задачи №№ **5, 6** (в,д), **8**

Предмет и метод теории вероятностей

Цель науки – описание, объяснение и предсказание явлений действительности на основе установленных законов, что позволяет находить решения в типичных ситуациях.

В основе научных знаний лежит наблюдение. Для обнаружения общей закономерности, которой подчиняется явление, необходимо многократно его наблюдать в одинаковых условиях. *Чем это вызвано и что понимать под одинаковыми условиями?*

Основные формулы комбинаторики

<u>Комбинаторика</u> *связана с подсчетом числа комбинаций, которые можно составить из данных элементов, соблюдая те или иные условия. Поясним это тремя «спортивными задачами».*

Задача 1.В соревновании участвуют 8 команд. Сколько существует вариантов распределения мест между ними?

Решение. Обозначим команды цифрами : 1,2,3,4,5,6,7,8. Тогда возможны, например, такие исходы соревнования: {1,2,3,4,5,6,7,8}, {1,3,5,7,2,4,6,8}, {8,7,6,5,4,3,2,1}. Выписывать все возможные варианты долго, и возможны повторения. Их, очевидно, столько, сколько существует различных «перестановок» из восьми цифр.

Задача 2. К полуфинальному этапу турнира допущены 8 команд: 1,2,3,4,5,6,7,8. В финал (на равных основаниях) попадают лишь три из них. Сколькими способами могут определиться участники финала?

Решение. В отличие от предыдущей задачи, здесь важно лишь, какие команды займут первые места. Может оказаться, что в финал попадут команды 2,3 и 5, или 2,6 и 7.При этом порядок расположения в тройке команды-победителя неважен: в финале они все равно поведут борьбу на равных. Очевидно, что возможных исходов такого соревнования будет столько, сколько существует способов выбора трех цифр из восьми. При этом порядок расположения выбранных цифр не играет никакой роли: 2,3,5 или 5,3,2 или 3,5,2 – каждый из этих вариантов приведет к одному и тому же «результату».

Задача 3 . Пусть по-прежнему соревнуются 8 команд, но не в полуфинале, как в задаче 2 , а в финале, где разыгрываются три медали: золотая, серебряная и бронзовая. Сколькими способами могут быть распределены медали?

Решение. Как и в предыдущей задаче, надо рассмотреть всевозможные варианты выбора трех команд из восьми. Но теперь нужно считаться не только с тем, какие именно команды окажутся в тройке команд-победителей, но и с тем, как они поделят места между собой. Ведь совсем не одно и то же получить золотую медаль или бронзовую. Поэтому теперь распределения типа 2-3-5 и 5-2-3 будем связывать с двумя разными «результатами».

- Если составляются такие комбинации из n элементов по m, которые отличаются друг от друга только составом элементов, то они называются ***сочетаниями***. Общее число сочетаний из n элементов по m определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Легко видеть, что $C_n^1 = n,\ C_n^0 = 1,\ C_n^n = 1$

- Если комбинации отличаются не только составом элементов, но и порядком их следования, то они называются ***<u>размещениями</u>.*** Их число находится по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Считают, что $A_n^0 = 1$

- Если комбинации берутся из всех n элементов и отличаются только порядком следования элементов, то они называются ***перестановками.*** Их число равно*:*

$$P_n = n!$$

Очевидно теперь, что приведенные выше задачи имеют следующие решения:

№1: $P_8 = 8! = 40230$

№2: $C_8^3 = \frac{8!}{3!*(8-3)!} = \frac{8!}{3!*5!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8}{(1*2*3)*(1*2*3*4*5)} = \frac{6*7*8}{1*2*3} = 7*8 = 56$

№3: $A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 6*7*8 = 336$

В теории вероятностей наряду с приведенной выше терминологией используется и специфическая терминология. Исходные *n* элементов рассматриваются как *генеральная совокупность*. Из нее осуществляется *выбор*, результатом которого служит выборка объема *m* .

- Если каждый элемент генеральной совокупности может входить в выборку не более одного раза, то говорят о выборке *без возвращения*.
- Если для каждого элемента генеральной совокупности допускается многократное использование в выборке, то говорят о *выборе с возвращением*.

Различают *упорядоченные и неупорядоченные выборки*, - в зависимости от того, как сравниваются эти выборки – с учетом или без учета порядка их составляющих.

План-конспект занятия №2

Использование элементов комбинаторики в решении задач

Цель занятия: познакомить с методами решения комбинаторных задач
Вид занятия: теоретическое занятие
Задачи:
Учебные: 1) научить решать задачи на расчет количества выборок;
2) пропедевтика понятия геометрической вероятности.
Развивающие:
3) развитие логического мышления;
4) развитие памяти
Воспитательные:
2) воспитание аккуратности и внимательности
Межпредметные связи:
Математика и Элементы высшей математики;
Логика
Алгоритмизация программирование
Экономика и менеджмент

Ход занятия:

1. Организационный момент
1-3 мин
(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)
2. Объяснение нового материала
60 мин
а) Введение в дисциплину,
б) Элементы комбинаторики
3. Закрепление материала
20 мин
(решение задач №№ **1, 2, 3, 4, 6** (а,б,г), **7**)
4. Подведение итогов занятия.
1-3 мин
5. Домашнее задание:
1-3мин
а) выучить конспект. [7], с.10-13, [8], № 15,18
б) решить задачи №№ **5, 6** (в,д), **8**
в)Реферирование на тему «История возникновения и развития теории вероятностей»

Задачи практикума.

4. Сколькими способами можно расположить шесть разных книг на одной полке?
Решение: $P_n = n! = 6! = 720$
5. Алхимик использует семь ингредиентов для приготовления эликсира жизни. Сколько существует различных порядков вливания их в сосуд?
Решение: $P_n = n! = 7! = 720*7 = 5040$

6. Из цифр 1,2,3,4,5 составляются всевозможные пятизначные числа без повторяющихся цифр.
а). Сколько всего получится таких чисел?
б). Сколько среди них будет начинаться с цифры 5?
в). Сколько чисел будет оканчиваться комбинацией 41?
г). Сколько получится четных и сколько нечетных чисел?
д). Сколько получится чисел, кратных 3?
Решение: а) $P_n = n! = 5! = 120$
б) $P_{n-1} = (n-1)! = 4! = 24$
в) чисел, оканчивающихся на 41, будет столько, сколько существует способов расположения в ряд остальных цифр 2,3,5, т.е. $3! = 6$
г) четные из рассматриваемых чисел оканчиваются либо цифрой 2, либо 4. И тех и других будет по $4! = 24$, всего 48 чисел. Остальные числа будут нечетными, их количество равно $5! – 48 = 120-48=72$, или как $4! + 4! + 4! = 3*4! = 72$.

д) числа, кратные 3, имеют в сумме цифр число, кратное 3. Так как 1+2+3+4+5 = 15 делится на 3, то все числа, составленные из этих цифр без повторений, делятся на 3, т.е. всего 5! = 120 чисел.

7. Из отряда солдат в 50 человек назначаются в караул 4 человека. Сколькими способами это можно сделать? Сколько среди них таких, что в число караульных попадет рядовой Иванов?

Решение: а) $C_{50}^{4} = \frac{50!}{4!*(50-4)!} = \frac{50!}{4!*46!} = \frac{47*48*49*50}{1*2*3*4} = 47*2*49*50 = 230300$

б) $C_{49}^{3} = \frac{49!}{3!*(49-3)!} = \frac{49!}{3!*46!} = \frac{47*48*49}{1*2*3} = 47*8*49 = 18424$

8. На прямой отмечены 5 точек: A, B, C, D, E. Сколько отрезков определяют эти точки?

Решение: $C_{5}^{2} = \frac{5!}{2!*(5-2)!} = \frac{4*5}{1*2} = 10$

Проверьте графически!!!

План-конспект занятия №3

Тема: Случайные события.

Классическое определение вероятности события.

Цель занятия: познакомить с основными понятиями ТВиМС.

Вид занятия: теоретическое занятие

Задачи:

Учебные: 1) разъяснить основные понятия ТВиМС;

2) научить решать задачи на расчет вероятностей по классическому определению;

3) закрепить знание формул комбинаторики.

Развивающие:

1) развитие логического мышления;

2) развитие памяти

Воспитательные:

1. воспитание аккуратности и внимательности

Межпредметные связи:

Математика и Элементы высшей математики;

Логика

<u>Ход занятия:</u>

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Поверка усвоения пройденного материала:

10-15 мин

а) самостоятельная работа в тетрадях для дом. работ

б) проверка Д.З. (собрать тетради)

Задачи самостоятельной работы:

1 вариант.	2 вариант.
На медосмотр приглашаются 10 человек из вашей группы. Сколько существует комбинаций, в которых присутствует и Ваша фамилия?	Сколькими способами можно выбрать старосту, профорга и физорга вашей группы?

3. Объяснение нового материала (см. лекцию)

40-45 мин

4. Закрепление материала

20-25 мин

(решение задач №№ **9,10,11,14,**)

6. Подведение итогов занятия.

1-3 мин

7. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект[3], стр 31-34.
б) решить задачи №№ 12,13
в) Реферирование на тему «Развитие теории вероятностей в XXI веке»

Тема: Случайные события. Классическое определение вероятности события.

В экономических задачах приходится сталкиваться с двумя типами явлений. Первый тип – явления неслучайные, второй – случайные.

- ***Неслучайными*** называются такие явления, которые при повторении в одинаковых условиях приводят к одному и тому же результату.
- Явления, которые при повторении в одинаковых условиях приводят к различным результатам, называются ***случайными.***

Наука, изучающая закономерности в случайных явлениях, называется теорией вероятностей.

Всякий результат явления является ***событием***. *События могут быть:*

- ***Достоверными***, т.е. такими, которые неизбежно наступают при каждом испытании *(Например, солнце встает каждый день).*
- ***Невозможными,*** т.е. такими, которые заведомо не могут произойти (например, месяц апрель наступит после ноября);
- ***Случайными,*** т.е. такими**,** которые могут в результате испытания либо произойти, либо не произойти (например: либо завтра будет мороз, либо нет).

Степень возможности появления того или иного случайного события называется ***вероятностью***.

- *При классическом определении* за ***вероятность*** события А принимается отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных исходов (m) к общему числу возможных исходов (n):

  P (A) =m/n.

  Исход называется ***благоприятствующим*** данному событию, если его появление влечет за собой наступление такого события. *В частности, появлению четного числа очков при бросании игральной кости соответствуют элементарные исходы с цифрами 2, 4, 6.*

Пример 9*. Статистические данные свидетельствуют, что при вложении капитала размером в 100 тыс. у.д.е в строительство прибыль была получена в 18 случаях из 90. Какова вероятность получения прибыли от вложения 100 тыс. у.д.е. в строительство?*

Решение .Вероятность рассчитывается по формуле:

$$\frac{Количество\_благоприятных\_случаев}{Общее\_количество\_равновозможных\_случаев} = \frac{18}{90} = 0{,}2, \text{ или } 20\%$$

Пример 10 *На территории предприятия произошла авария водопровода. Общая длина водопровода L = 150 м. В том числе 50 м трубы (l) приходится на труднодоступные места. Какова вероятность того, что ремонт придется производить именно на труднодоступном участке?*

Решение .Вероятность рассчитывается по формуле:

$$P = \frac{Количество\_благоприятных\_случаев}{Общее\_количество\_равновозможных\_случаев} = \frac{l}{L} = \frac{50}{150} = 0{,}33, \text{ или } 33\%$$

Для вычисления числа благоприятствующих рассматриваемому событию исходов или общего числа элементарных исходов широко используются ***формулы комбинаторики****.*

Основные свойства вероятностей :

1. Вероятность случайного события есть число положительное: $P(A) \geq 0$

2. Достоверное событие имеет вероятность, равную 1: $P(A)=1$.

3. Невозможное событие имеет вероятность, равную 0 : $P(A) = 0$.

4. Вероятность появления случайного события находится в пределах от 0 до 1: $0 \leq P(A) \leq 1$.

План-конспект занятия №4

Тема: Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности

Тип занятия: теоретическое занятие.

Цель занятия: закрепить навыки вычисления вероятностей по классической формуле вероятности..

Задачи:

Учебные:1) Закрепить ЗУН работы с классическим определением вероятности;
2) проверить усвоение материала

Развивающие:
1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти

Воспитательные:
1) воспитание самостоятельности при решении задач

Межпредметные связи:

Математика и Элементы высшей математики;
Логика
Алгоритмизация программирование.
Экономика
Менеджмент.

<u>Ход занятия:</u>

1. Оргмомент (взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)
   1-3 мин
2. Повторение пройденного материала (проверка Д.З. у доски с четким проговариванием определений и обоснованием решения)
   10-15 мин
3. Закрепление материала (решение задач №№ **16,17, 19**)
   60-65 мин
4. Подведение итогов занятия и выставление оценок за работу на уроке.
   3-5 мин
5. Домашнее задание: (решить задачи №№__**15, 18**)
   1-3 мин

<u>Задачи практикума:</u>

11. В магазин поступило 30 холодильников, пять из них имеют заводской дефект. Случайным образом выбирается один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Решение: Пусть событие А – «холодильник без дефекта»; используем классическое определение вероятности: P = m / n, где m =1, n = 30, тогда P = 25/30 = 5/6

12. В коробке находится шесть одинаковых по форме и близких по диаметру сверл. Случайным образом сверла извлекаются из коробки. Какова вероятность того, что сверла извлекутся в порядке возрастания их диаметра?

Решение: Пусть событие В – «сверла в порядке возрастания»; используем классическое определение вероятности: P = m / n, где m =1, n = 6!, тогда P = 1 / 6! = 1 / 720

13. Комиссия по качеству раз в месяц проверяет качество продуктов в двух из 30 магазинов, среди которых находятся и два известных вам магазина. Какова вероятность того, что в течение месяца они оба будут проверены?

Решение: Пусть событие С – «проверены оба известных магазина»; используем классическое определение вероятности: P = m / n, где m =1, n = C_{30}^{2} *= 30! / (2!*28!) = 435, тогда P = 1 / 435 = 0,0023*

14. На станцию прибыли 10 вагонов разной продукции. Вагоны помечены номерами от одного до десяти. Найти вероятность того, что среди пяти выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5?

Решение. Пусть событие А – «вскрыты вагоны 2 и 5»; используем классическое определение вероятности: P = m / n, где Общее число возможных комбинаций для контрольного вскрытия равно числу сочетаний из 10 по 5, т. е. C_{10}^{5}

Число исходов, благоприятствующих данному событию, будет равно числу таких комбинаций, в которых две цифры будут 2 и 5, а остальные будут составлять сочетания, число которых равно C_8^3*. Тогда искомая вероятность найдется по формуле*

$$P=\frac{C_8^3}{C_{10}^5}=\frac{8!*5!*5!}{3!*5!*10!}=\frac{2}{9}.$$

15. Изготовлена партия из 200 изделий, в которых оказалось три бракованных. Произведена выборка из пяти изделий. Найти вероятность следующих событий: а) в выборке не будет ни одного бракованного изделия; б) в выборке будет одно бракованное изделие.

Решение: Пусть событие А – «изделие небракованное»; используем классическое определение вероятности: P = m / n, где Общее число возможных комбинаций для выборки равно числу сочетаний из 200 по 5, т. е. C_{200}^{5}

Число исходов, благоприятствующих данному событию, будет равно числу таких комбинаций, в которых все пять изделий качественные, число которых равно C_{197}^5 *. Тогда искомая вероятность найдется по формуле*

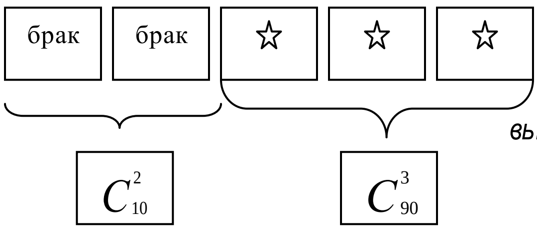
$$P=\frac{C_{197}^5}{C_{200}^5}=0{,}9264.$$

16. Из 20 акционерных обществ (АО) четыре являются банкротами. Гражданин приобрел по одной акции шести АО. Какова вероятность того, что среди купленных акций две окажутся акциями банкротов?

Решение. *Общее число комбинаций выбора АО равно числу сочетаний из 20 по 6, т. е.* C_{20}^{6}*. Число благоприятствующих исходов определяется как произведение* $C_4^2\,C_{16}^4$*, где первый сомножитель указывает число комбинаций выбора АО-банкротов из четырех. Но с каждой такой комбинацией могут встретиться АО, не являющиеся банкротами. Число комбинаций таких АО будет* C_{16}^4*. Поэтому искомая вероятность запишется в виде*

$$P=\frac{C_4^2C_{16}^4}{C_{20}^6},\text{ т. е. } P=0{,}28.$$

17. Из 100 изготовленных деталей 10 имеют дефект. Для проверки были отобраны пять деталей. Какова вероятность того, что среди отобранных деталей две окажутся бракованными?



Решение. *Общее число комбинаций деталей для проверки равно числу сочетаний из 100 по 5, т. е.* C_{100}^5*. Число благоприятствующих исходов определяется как произведение* $C_{10}^{2}*C_{90}^3$*, где первый сомножитель указывает число комбинаций выбора двух некачественных деталей из десяти имеющихся, а второй – число комбинаций трех качественных деталей из оставшихся 90. Искомая вероятность запишется в виде*

$$P=\frac{C_{10}^2C_{90}^3}{C_{100}^5},\text{ т. е. } P=0{,}07.$$

18. На склад привезли 50 ящиков комплектующих изделий для одного из видов ЭВМ, но среди них оказалось четыре ящика комплектующих для другого вида ЭВМ. Наудачу взяли шесть ящиков. Найти вероятность того, что в одном из этих шести ящиков окажутся некомплектные детали.

Решение. *Общее число комбинаций выбора ящиков равно числу сочетаний из 50 по 6, т. е.* C_{50}^{6}. *Число благоприятствующих исходов определяется как произведение* $C_4^1 * C_{46}^5$,

$$P=\frac{C_4^1 C_{46}^5}{C_{50}^6}\text{, т. е. } P=0,345.$$

19. В партии из 15 однотипных стиральных машин пять машин изготовлены на заводе А, а 10 – на заводе В. Случайным образом отобрано 5 машин. Найти вероятность того, что две из них изготовлены на заводе А.

Решение. *Общее число комбинаций выбора машин равно числу сочетаний из 15 по 5, т. е.* C_{15}^5. *Число благоприятствующих исходов определяется как произведение* $C_5^2 * C_{10}^3$, *искомая вероятность запишется в виде*

$$P=\frac{C_5^2 C_{10}^3}{C_{15}^5}\text{, т. е. } P=0,38.$$

Дополнительные задачи:

01. В связке 20 ключей, из которых только один подходит к данному замку. Найти вероятность того, что для открывания замка придется попробовать ровно половину этих ключей.

02. В группе 20 учащихся. Из 30-ти экзаменационных билетов студент знает лишь 25 билетов. Какова вероятность того, что, идя на экзамен последним, он достанет счастливый билет?

03. Из тридцати экзаменационных билетов один студент не знает двух, а второй – трех билетов. Кому из них выгоднее брать билет первым и кому вторым?

04. В поезде (10 вагонов) случайно оказались преступник и комиссар Мегрэ. Какова вероятность, что они едут: а) в одном вагоне, б) в соседних вагонах?

05. Восемь девушек, в том числе три сестры, водят хоровод. Какова вероятность того, что встав в круг наугад, сестры окажутся рядом?

План-конспект занятия №5

Тема: Теоремы сложения и умножения вероятностей

Цель занятия: познакомить с основными теоремами ТВиМС.
Вид занятия: теоретическое занятие
Задачи:
Учебные: 1) разъяснить основные понятия и теоремы ТВиМС;
2) научить решать задачи на расчет вероятностей с использованием теорем;
3) закрепить знание формул комбинаторики.
Развивающие:
1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти
Воспитательные:
1) воспитание аккуратности и внимательности
Межпредметные связи:
Математика и Элементы высшей математики;
Логика
Алгоритмизация и программирование
Экономика и менеджмент

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

5. Поверка усвоения пройденного материала:

10-15 мин

а) самостоятельная работа в тетрадях для дом. работ
б) проверка Д.З. (собрать тетради)

Задачи самостоятельной работы:

1 вариант.	2 вариант.
Из 30 проверенных тетрадей лишь в 4 стоит оценка «5»и в шести – оценка «4» . Какова вероятность, что у вас и у соседа по парте оценка не ниже ?	Два студента из группы не выполнили ДЗ. Какова вероятность, что среди взятых на проверку 6 тетрадей будут именно их тетради?

6. Объяснение нового материала (см. лекцию)

40-45 мин

7. Закрепление материала

20-25 мин

(решение задач №№ **20, 21, 22**, // **23, 26**)

8. Подведение итогов занятия.

1-3 мин

9. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект [3], стр 34-48.
б) решить задачи №№ **24, 25**

<u>Тема: Теоремы сложения и умножения вероятностей</u>

- События называются ***несовместными***, если они не могут появиться вместе в одном опыте (например, положительный или отрицательный исход данной экономической операции).
- ***Совместные*** события – это события, которые не исключают одно другое (например, положительный исход операции и при этом малые фактические издержки).
- ***Суммой событий*** называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из рассматриваемых событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Если А и в – два несовместных события, то вероятность того, что произойдет одно из них (безразлично какое) (сумма несовместных событий) равна сумме вероятностей этих событий:

$$P_{A\,или\,B} = P(A) + P(B)$$

В общем виде: $P\left(\sum_{i-1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

<u>Пример 20</u> *Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии, Ри=0,4, а того, что он произведен в Турции, Рт = 0,3. Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран: или в Италии, или в Турции?*

<u>Решение</u> .Вероятность рассчитывается по формуле: $P_{И\,или\,Т} = Pи + Pт = 0{,}4+0{,}3=0{,}7$

- ***Единственно возможные события*** – когда в результате испытания неизбежно происходит хотя бы одно из них. Такие события образуют ***полную группу***.
- ***Противоположные события*** – два несовместных и единственно возможных события.

Следствие 1. Сумма вероятностей несовместных и единственно возможных событий равна единице.

Следствие 2. Вероятность противоположного события P($\overline{A}$) равна 1 минус вероятность самого этого события.

$$P(\overline{A}) = 1 – P(A)$$

<u>Пример 21.</u> *В денежно-вещевой лотерее на серию в 10000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Найти вероятности: а)получить денежный выигрыш; б) получить вещевой выигрыш; в) получить выигрыш вообще; г) ничего не выиграть.*

<u>Решение</u> .Вероятность рассчитывается по формуле:

$$Pден = \frac{120}{10000} = 0{,}012, \text{ или } 1{,}20\%$$

$$Рвещ = \frac{80}{10000} = 0,008, или\ 0,8\%$$

Рвообще = 0,012 + 0,008 = 0,02, или 2%

Рничего = 1 – 0,02 = 0,98, или 98%

- ***Произведением*** событий называется событие, состоящее в появлении всех из рассматриваемых событий.
- Если появление одного из событий не влияет на вероятность появления другого, то такие события называются ***независимыми***. Если вероятность в этом случае меняется, то события называются ***зависимыми***. Например, вероятность своевременного получения груза и вероятность того, что упаковка груза не будет повреждена.

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Если А и В – два совместные независимые события, то вероятность того, что произойдут оба эти события, равна произведению их вероятностей:

$$P_{(A\ и\ B)} = P(A) * P(B).$$

<u>Пример 22</u> *Вероятность своевременного получения груза $P_{сп}$=0,8, а вероятность того, что упаковка груза не будет повреждена, $P_{уп}$ = 0,7.Какова вероятность того, что груз будет получен вовремя в неповрежденной упаковке?*

<u>Решение</u> .Вероятность рассчитывается по формуле:

$$Рсн = P_{сп} * P_{уп} = 0,8*0,7 = 0,56, или\ 56\%$$

Примечание. Если вероятности простых событий (сомножители) одинаковы, то вместо умножения достаточно возвести эти вероятности в соответствующую степень:

$$P(AuA) = P(A)*P(A) = P(A)^2$$

- Вероятность события В, вычисленная при условии, что произошло событие А, называется ***условной вероятностью*** события В относительно события А. Эта вероятность обозначается *P(B/A).*

Теорема умножения вероятностей двух зависимых событий. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго относительно первого:

$$P_{(AuB)} = P(A)* P(B/A) = P(B) * P(A/B)$$

Эта теорема обобщается на любое конечное число событий:

$$P(ABC…LM) = P(A)* P(B/A)* P(C/AB)* … * P (M/AB…L).$$

Теорема сложения вероятностей двух совместных событий. Вероятность сложения двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB).$$

План-конспект занятия №6

<u>Тема : Вычисление вероятностей сложных событий с использованием формул сложения и умножения вероятностей</u>

Тип занятия: *практическое занятие.*

Цель занятия: закрепить навыки применения основных теорем ТВиМС.

Задачи:

Учебные: 1) закрепить ЗУН расчета вероятностей сложных событий

2) контроль усвоения материала студентами.

Развивающие:

1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти

Воспитательные:

1) воспитание самостоятельности и ответственности при решении поставленных задач.

Межпредметные связи:

Математика и Элементы высшей математики; Логика, Алгоритмизация программирование, Экономика, Менеджмент.

<u>Ход занятия:</u>

1. Оргмомент (взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

1-3 мин

2. Повторение пройденного материала (проверка Д.З. у доски с четким проговариванием определений и обоснованием решения)

10-15 мин

3. Закрепление материала (решение задач №№ **_28, 29, 31 (а), 32**)

60-65 мин

4. Подведение итогов занятия и выставление оценок за работу на уроке.

3-5 мин

5. Домашнее задание: (решить задачи №№ **__27, 30, 31(б)**)

1-3 мин

Задачи практикума.

23. На полке находится 10 книг, расставленных в произвольном порядке. Из них три книги по теории вероятностей, три – по менеджменту и четыре – по строительным материалам. Студент случайным образом достает одну книгу. Какова вероятность того, что он возьмет книгу по теории вероятностей или по строительным материалам?

Решение. Пусть событие А: «студент взял книгу по теории вероятностей» и событие В: «студент взял книгу по строительным материалам». Вероятности соответственно равны: P(A) = 3/10, P(B) = 4/10.
События А и В несовместны. Поэтому искомая вероятность находится как сумма вероятностей P(A+B) = 0.3 + 0.4 = 0.7.

24. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада?

25. В порт приходят корабли только из трех пунктов отправления. Вероятность появления корабля из первого пункта равна 0,2, из второго пункта – 0,6. Найти вероятность прибытия корабля из третьего пункта.

Решение. Пусть событие А: «корабль из первого пункта», событие В: «корабль из второго пункта» и С: «корабль из третьего пункта»,. Вероятности соответственно равны: P(A) = 0,2, P(B) = 0,6, P(C) = 1-(0,2+0,6) = 0,2, так как события образуют полную группу.

26. Контролер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия стандарту изделий равна 0,9. а)Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий оба будут стандартными, если события появления стандартных изделий независимы? б) Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное?

Решение. а) Учитывая то, что события А1 (первое изделие стандартное) и А2 (второе изделие стандартное) независимы, используем формулу

*P(A1 и A2) = P(A1) * P(A2)= 0,9*0,9 =0,81.*

б) Пусть В1 – событие, состоящее в том, что только первое изделие стандартное; В2 – только второе изделие стандартное. Событие В1 можно рассматривать как произведение двух событий В1 = А1$\overline{A2}$, т.е появилось первое событие и не появилось второе. Аналогично В2 = $\overline{A1}$ *А2. События В1 и В2 несовместные, поэтому*

*P (B1 или B2) = P(B1) + P(B2) = P(A1) * P($\overline{A2}$) + P($\overline{A1}$) * P(A2).*

Если обозначить вероятность появления стандартного изделия через p, а вероятность противоположного события через q = 1 – p, то получим

P(B1 + B2) = pq + qp = 2 pq.

*В данном случае P(B1+B2) = 2 * 0,9 * 0,1 = 0,18*

27. Вероятность правильного оформления счета на предприятии составляет 0,95. Во время аудиторской проверки были взяты два счета. Какова вероятность того, что только один из них оформлен правильно?

Решение. Пусть событие A1: «счет оформлен правильно» и событие A2: «счет оформлен неправильно». Так как события противоположные, вероятности соответственно равны: P(A1) = 0,95, P(A2) = 1 – 0,95 = 0,05.
*События A1 и A2 независимы. Поэтому искомая вероятность находится как произведение вероятностей P(A1и A2)или (A2 и A1) =**2** * P(A1иA2) = 2 * 0,05 * 0,95 = 0,095.*

28. Вероятность правильного оформления накладной при передаче продукции равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех накладных только две оформлены правильно.

Решение. Пусть событие A1: «счет оформлен правильно» и событие A2: «счет оформлен неправильно». Так как события противоположные, вероятности соответственно равны: P(A1) = 0,8, P(A2) = 1 –0,8 = 0,2.
*События A1 и A2 независимы. Поэтому искомая вероятность находится как произведение вероятностей P(A1и A1 и A2)или (A2 и A1 и A1)или (A1 и A2 и A1) = **3** *P(A1иA1 иA2) = 3 * 0,8 * 0,8 *0,2 = 0,384.*

29. В районе 100 поселков. В пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два поселка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката?

*Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что в первом выбранном поселке находится пункт проката, B – событие, состоящее в том, что во втором выбранном поселке находится пункт проката. Вероятность события A P(A) = 5/100 = 0,05. Рассмотрим событие B при условии, что событие A произошло. Найдем условную вероятность P(B/A) = 4/99. Искомая вероятность найдется как вероятность произведения двух событий P(AB) = 5/100*4/99 = 1/495.*

30. В городе находятся 15 продовольственных и 5 непродовольственных магазинов. Случайным образом для приватизации были отобраны три магазина. Найти вероятность того, что все эти магазины непродовольственные.

Решение. Пусть событие A –«первый выбранный магазин непродовольственный», B – «второй магазин непродовольственный», C – «третий магазин непродовольственный».
*Вероятность события A P(A) = 5/20. Рассмотрим событие B при условии, что событие A произошло. Найдем условную вероятность P(B/A) = 4/19, а условная вероятность события C P(C/AB) = 3/18. Искомая вероятность найдется как вероятность произведения трех событий P(ABC) = 5/20 * 4/19 * 3/18 = 0,0090.*

31. В магазине имеются 10 женских и 6 мужских шуб. Для анализа качества отобрали три шубы случайным образом. Определить вероятность того, что среди отобранных шуб окажутся: а) только женские шубы; б) только мужские или только женские шубы.

Решение. а)Пусть событие A –«первая шуба женская», B – «вторая шуба женская», C – «третья шуба женская».
*Вероятность события A P(A) = 10/16. Рассмотрим событие B при условии, что событие A произошло. Найдем условную вероятность P(B/A) = 9/15, а условная вероятность события C P(C/AB) = 8/14. Искомая вероятность найдется как вероятность произведения трех событий P(ABC) = 10/16 * 9/15 * 8/14 = 3/14 = 3%*
*б) Аналогично а) найдем вероятность того, что все три шубы мужские: P(DEF) = 6/16 * 5/15 * 4/14 = 1/28. Тогда искомая вероятность равна сумме вероятностей P(ABC или DEF) = 3/14 + 1/28 =1/4 = 25%*

32. На предприятие поступают заявки от нескольких торговых пунктов. Вероятности поступления заявок от пунктов A и B равны соответственно 0,5 и 0,4. Найти вероятность поступления заявок от пункта A или пункта B, считая события поступления заявок от этих пунктов независимыми, но совместными.

Решение. Пусть событие A –«поступления заявки от п.A», B – «поступление заявки от п.B».
Вероятность события A P(A) = 0,5, P(B) = 0,4 по условию. Если считать события поступления заявок независимыми, но совместными, надо применить теорему сложения вероятностей двух совместных событий:
*P(A или B)= P(A) + P(B) –P(A и B) = 0,5+0,4-0,5*0,4 = 0,7*

План-конспект занятия №7

Тема: Формула полной вероятности и формула Байеса

Тип занятия: *практическое занятие.*
Цель занятия: закрепить навыки применения основных формул ТВиМС.
Задачи:
Учебные: 1) познакомить с формулами вероятности появления хотя бы одного события, полной вероятности и формулой Байеса
2) закрепить ЗУН расчета вероятностей сложных событий
3) контроль усвоения материала студентами.
Развивающие:
1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти
Воспитательные:
5) воспитание самостоятельности и ответственности при решении поставленных задач.
Межпредметные связи:
Математика и Элементы высшей математики; Логика, Алгоритмизация программирование, Экономика, Менеджмент.

Ход занятия:

1. Оргмомент (взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)
1-3 мин
2. Повторение пройденного материала (проверка Д.З. у доски с четким проговариванием определений и обоснованием решения)
10-15 мин
3. Объяснение нового материала (см. лекции)
15 мин
4. Закрепление материала (решение задач №№ **_33, 35, 37, 39 (а)**)
45-50 мин
5. Подведение итогов занятия и выставление оценок за работу на уроке.
3-5 мин
6. Домашнее задание:
А)решить задачи №№ **34,**36**, 38, 39 (б), 40 (**для вывода формулы Бернулли!))
Б) Реферирование темы «Жизнеописание Байеса»
В)Конспектирование [3], стр 55-62
1-3 мин

Вероятность появления хотя бы одного события.

В некоторых случаях вероятность события удобнее подсчитывать как вероятность противоположного другому событию.

Пусть события $A_1, A_2, \dots A_n$ независимы и известны вероятности этих событий: $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, … $P(A_n) = p_n$.

Обозначив вероятности противоположных событий $P(\overline{A1}) = q_1$, $P(\overline{A2}) = q_2$, … $P(\overline{An}) = q_n$, найдем вероятность того, что ни одно из событий $A_1, A_2, \dots A_n$ в опыте не наступит:

$$P(B) = q_1 * q_2 * \dots *q_n.$$

В этом случае искомая вероятность, т.е. вероятность появления хотя бы одного события, определяется как вероятность противоположного события

$$P(\overline{B}) = 1 – P(B) = 1 - q_1 * q_2 * \dots *q_n.$$

Задачи практикума:

33. Предприятие обеспечивает регулярный выпуск продукции при безотказной поставке комплектующих от двух смежников. Вероятность отказа в поставке продукции от первого из смежников равна 0,05, от второго – 0,08. Найти вероятность сбоя в работе предприятия.

Решение. Пусть событие A1 –«отказ в поставке первого смежника», событие A2 –«отказ в поставке второго смежника», B –«безотказная работа предприятия»

Вероятность события P(A1) = p1 = 0,05, события P(A2) = p2 =0,08. Тогда вероятность события P(B) = $P(\overline{A_1} u \overline{A_2})$ *= q1 * q2. . Рассмотрим событие* $\overline{B}$ *:.«сбой в работе предприятия», Искомая вероятность* *найдется как вероятность противоположного события $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - q1 * q2 = 1 - 0.95 * 0.92 = 0.126$*

34. Вероятности своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием.

Решение. Пусть событие А1 –«своевременное выполнение задания 1-м предприятием»; р1 = 0,5;
событие А2 –«своевременное выполнение задания 2-м предприятием»; р1 = 0,6
событие А3 –«своевременное выполнение задания 3-м предприятием»; р3 = 0,7
Пусть событие В : «выполнение задания хотя бы одним предприятием».
Тогда событие : «невыполнение задания ни одним из 3-х предприятий»
Вероятность события $P(\overline{B}) = P(\overline{A_1} u \overline{A_2} u \overline{A_3}) = q1 * q2 * q3$.
Искомая вероятность найдется как вероятность противоположного события $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - q1 * q2 * q3 = 1 - 0.5 * 0.4 * 0,3 = 0,94$

Формула полной вероятности и формула Байеса

Если некоторое событие В совершается с одним из *n* несовместных событий $A_1, A_2, \dots A_n$, образующих полную группу событий, то для определения вероятности этого события может быть использована формула полной вероятности

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) * P(B/A_i),$$

где $P(A_i)$ – вероятность события A_i;
$P(B/A_i)$ – условная вероятность события В.
Для определения вероятности события A_i при условии, что произошло событие В, используется *формула Байеса*

$$P(A_i/B) = \frac{P(Ai) * P(B/Ai)}{P(B)}$$

35. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго – 6 и от третьего – 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Какова вероятность того, что: а) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока; б) проработавший без дефекта двигатель изготовлен на первом заводе, на втором заводе?

Решение. Обозначим через А1, А2, А3 события установки на автомашину двигателей, изготовленных соответственно на первом, втором или третьем моторных заводах. Вероятности этих событий: Р(А1) = 0,5; Р(А2) = 0,3; Р(А3) = 0,2.

*а) Вероятность того, что наугад взятый двигатель проработает без дефектов, найдем по формуле полной вероятности: Р(В) = Р(А1) * Р(В/А1) + Р(А2) * Р(В/А2) + Р(А3) * Р(В/А3) = =0,5*0,9+0,3*0,8+0,2*0,7 = 0,83*

б) Если двигатель проработал без дефектов гарантийный срок, то вероятности того, что он изготовлен на первом, на втором заводах, найдем по формуле Байеса:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A1) * P(B/A1)}{P(B)} = \frac{0{,}5 * 0{,}9}{0{,}83} = 0{,}54$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A2) * P(B/A2)}{P(B)} = \frac{0{,}3 * 0{,}8}{0{,}83} = 0{,}29$$

36. На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25, второй 35, третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. а) Найти вероятность того, что случайно выбранный замок является дефектным; б) Случайно выбранный замок является дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен на первом, втором, третьем цехе?

Решение. Обозначим через А1, А2, А3 события изготовления замков соответственно на первом, втором или третьем цехе. Вероятности этих событий: Р(А1) = 25/100 = 0,25; Р(А2) = 35/100 = 0,35; Р(А3) = 40/100 = 0,40. Соответственно условные вероятности равны: Р(В/А1) = 0,05; Р(В/А2) = 0,04 и Р(В/А3) = 0,02.

*а) Вероятность того, что наугад взятый замок дефектный, найдем по формуле полной вероятности: Р(В) = Р(А1) * Р(В/А1) + Р(А2) * Р(В/А2) + Р(А3) * Р(В/А3) = 0,25*0,05+0,35*0,04+0,4*0,02 = 0,0345*

б) Если замок с дефектом, то вероятности того, что он изготовлен на первом, на втором , третьем цехе, найдем по формуле Байеса:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A1)*P(B/A1)}{P(B)} = \frac{0{,}25*0{,}05}{0{,}0345} = 36\%$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A2)*P(B/A2)}{P(B)} = \frac{0{,}35*0{,}04}{0{,}0345} = 40\%$$

$$P(A_3/B) = \frac{P(A3)*P(B/A3)}{P(B)} = \frac{0{,}4*{,}02}{0{,}0345} = 24\%$$

или 2-й способ: $P(A_3/B)$ = 100%-36%-40% = 24% (т.к. события образуют полную группу)

37. Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй – 35, третий – 25. Вероятность брака у первого рабочего 0,03, у второго – 0,02, у третьего – 0,01. взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие сделал второй рабочий.

<u>Решение.</u> Обозначим через A1, A2, A3 события изготовления изделия соответственно первым, вторым или третьим рабочим. Вероятности этих событий: P(A1) = 40/100 = 0,40; P(A2) = 0,35; P(A3) = 0,25. Соответственно условные вероятности равны: P(B/A1) = 0,03; P(B/A2) = 0,02 и P(B/A3) = 0,01.
*а) Вероятность того, что наугад взятое изделие дефектное, найдем по формуле полной вероятности: P(B) = P(A1) * P(B/A1) + P(A2) * P(B/A2) + P(A3) * P(B/A3) = 0,40*0,03+0,35*0,02+0,25*0,01= 0,0215*
б) Если изделие с дефектом, то вероятность того, что оно изготовлено вторым рабочим, найдем по формуле Байеса:

$$P(A_2/B) = \frac{P(A2)*P(B/A2)}{P(B)} = \frac{0{,}35*0{,}02}{0{,}0215} = 0{,}326 = 32{,}6\%$$

38. На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем ¾ продукции с процентом брака 4%, вторая – ¼ продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие: а) окажется бракованным; б) изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

<u>Решение.</u> Обозначим через A1, A2 события изготовления изделия соответственно первой или второй бригадой. Вероятности этих событий: P(A1) = 3/4; P(A2) = 1/4. Соответственно условные вероятности равны: P(B/A1) = 0,04; P(B/A2) = 0,06
*а) Вероятность того, что наугад взятое изделие с дефектом, найдем по формуле полной вероятности: P(B) = P(A1) * P(B/A1) + P(A2) * P(B/A2) = ¾ *0,04 + ¼ *0,06 = 0,045*
б) Если изделие с дефектом, то вероятность того, что оно изготовлено второй бригадой, найдем по формуле Байеса:

$$P(A_2/B) = \frac{P(A2)*P(B/A2)}{P(B)} = \frac{0{,}25*0{,}06}{0{,}045} = 1/3$$

39. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что это а) сапоги; б) туфли?

<u>Решение.</u> Обозначим через A1, A2 события ремонта сапог и туфель соответственно. Вероятности этих событий: P(A1) = 2/5; P(A2) = 3/5 Соответственно условные вероятности их качественного ремонта равны: P(B/A1) = 0,9; P(B/A2) = 0,85
*а) Вероятность того, что наугад взятая пара обуви отремонтирована качественно, найдем по формуле полной вероятности: P(B) = P(A1) * P(B/A1) + P(A2) * P(B/A2) = 0,40*0,9+0,60*0,85 =0,87*
б) Если обувь отремонтирована качественно, то вероятности того, что это сапоги ил туфли, найдем по формуле Байеса:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A1)*P(B/A1)}{P(B)} = \frac{0{,}4*0{,}9}{0{,}87} = 0{,}41$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A2)*P(B/A2)}{P(B)} = \frac{0{,}6*0{,}85}{0{,}87} = 0{,}59,$$

Или 2-й способ : $P(A_2/B) = 1 - P(A_1/B)$ = 1-0,41 = 0,59 (т.к. образуют полную группу событий)

План-конспект занятия №8

Тема: Формулы Бернулли и Пуассона

Вид занятия: теоретическое занятие

Цель занятия: познакомить с основными формулами ТВиМС.

Задачи:

Учебные: 1) расширить представление об области применения ТВиМС;

2) научить решать задачи на расчет вероятностей с использованием формул;

3) закрепить знание формул комбинаторики.

Развивающие:

1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти

Воспитательные:

1) воспитание аккуратности и внимательности
2) воспитание обдуманности при принятии решений

Межпредметные связи:

Математика и Элементы высшей математики;
Логика , Алгоритмизация и программирование
Экономика и менеджмент,

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Проверка усвоения пройденного материала:

10-15 мин

а) самостоятельная работа в тетрадях для дом. работ
б) проверка Д.З. (собрать тетради)

Задачи самостоятельной работы:

1 вариант.

В специализированную клинику поступают больные с одним из заболеваний А,ВиС: в среднем 50% больных с заболеваем А, 30% с В и 20% с С. Вероятности полного излечения этих болезней равны 0,95, 0,90 и 0,85 соответственно.

а)Какова вероятность того, что выбранный наугад пациент клиники будет вылечен полностью?

б) Больной, поступивший в клинику, был полностью вылечен. Какова вероятность того, что он страдал заболеванием В?

2 вариант.

Легковых автомобилей у бензоколонки проезжает вчетверо больше, чем грузовых машин. Вероятность того, что проезжающая машина подъедет на заправку, составляет для грузовой машины 0,05, для легковой – 0,15.

а) К месту, где расположена бензоколонка, приближается какая-то машина. Чему равна вероятность того, что она подъедет на заправку?

б)Только что от бензоколонки отъехала заправленная машина. Какова вероятность того, что это был грузовик?

3. Объяснение нового материала (см. лекцию)

40-45 мин

4. Закрепление материала

20-25 мин

(решение задач №№ **40, 41, 43, 45, 47 (а)**)

5. Подведение итогов занятия.

1-3 мин

6. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект [3], стр 62-70.
б) решить задачи №№ **42, 44, 46, 47 (б)**

Тема: Формулы Бернулли и Пуассона

Крупный шаг вперед в развитии ТВ связан с работами ***Я. Бернулли. (1654 – 1705)*** *. Ему принадлежит первое доказательство одного из важнейших положений теории вероятностей – так называемого закона больших чисел.*

Еще до Бернулли многие отмечали как эмпирический факт ту особенность случайных явлений, которую можно назвать «свойством устойчивости часто при большом числе опытов». Было неоднократно отмечено, *что при большом числе опытов, исход каждого из которых является случайным, относительная частота появления каждого данного исхода имеет тенденцию стабилизироваться, приближаясь к некоторому определенному числу – вероятности этого исхода. Например, если много раз бросать монету, относительная частота появления герба приближается к ½, при многократном бросании игральной кости частота появления грани с пятью очками приближается к 1/6 и т.д. Бернулли впервые дал теоретическое обоснование этому эмпирическому факту. Теорема Бернулли – простейшая форма закона больших чисел – устанавливает связь между вероятностью события и частотой его появления, при достаточно большом числе опытов можно с практической достоверностью ожидать сколь угодно близкого совпадения частоты с вероятностью.*

*Следует также отметить работы **С. Пуассона (1781 – 1840)**, доказавшего более общую, чем у Бернулли, форму закона больших чисел, а также впервые применившего ТВ к задачам стрельбы. С именем Пуассона вязан один из законов распределения, играющий большую роль в ТВ и ее приложениях.*

- Если при проведении испытаний вероятность появления события А не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются ***независимыми***.

Формула Бернулли определяет вероятность появления ровно m раз события А в серии из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна p:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m q^{n-m}, \qquad \text{где } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \; q = 1 - p.$$

В ряде случаев требуется определить вероятности появления события А менее *m* раз *(X< m)*, более *m* раз *(X>m)*, не менее *m* раз *(X≥ m)*, не более *m* раз *(X≤m)*. В этих случаях могут быть использованы формулы:

$$P(X<m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1),$$
$$P(X>m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n);$$
$$P(X\ge m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n);$$
$$P(X\le m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m).$$

При больших *n* и малых *p* вычисления по формуле Бернулли затруднены. В этих случаях обычно используется *формула Пуассона*:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \; \lambda = np$$

План-конспект занятия №9

Тема: Вычисление вероятностей сложных событий с использованием формулы Бернулли и закона редких событий (формулы Пуассона).

Вид занятия: практическое занятие

Цель занятия: познакомить с основными формулами ТВиМС.

Задачи:

Учебные: 1) расширить представление об области применения ТВиМС;
2) научить решать задачи на расчет вероятностей с использованием формул;
3) закрепить знание формул комбинаторики.
4) Решение вероятностных задач по схеме Бернулли

Развивающие:
3) развитие логического мышления;
4) развитие памяти

Воспитательные:
3) воспитание аккуратности и внимательности
4) воспитание обдуманности при принятии решений

Межпредметные связи:
Математика и Элементы высшей математики;
Логика , Алгоритмизация и программирование
Экономика и менеджмент,

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Закрепление материала

40-45 мин

(решение задач №№ **45, 47 (а)**)

4. Подведение итогов занятия.

1-3 мин

5) Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект [3], стр 62-70.

б) решить задачи №№ **46, 47 (б)**

Задачи практикума:

40. В результате обследования были выделены семьи, имеющие по четыре ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней: а) одного мальчика; б) двух мальчиков.

Решение. Вероятность появления мальчика или девочки равна p= ½. Вероятность появления мальчика в семье, имеющей четырех детей, находится по формуле Бернулли:

$$P_4(1) = c_4^1 pq^3 = 4!/3! * (1/2) * (1/2)3 = 1/4.$$

Вероятность появления в семье двух мальчиков равна

$$P4\,(2) = c_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2!*2!} (1/2)^2 * (1/2)^2 = 3/8$$

41. Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуется холодильник марки «А», равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется: а) не менее чем двум покупателям; б) не более чем трем покупателям; в) всем четырем покупателям.

Решение. Используем формулу Бернулли:

а) $P(X \geq 2) = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = c_4^2 p^2 q^2 + c_4^3 p^3 q + c_4^4 p^4 q^0 = 0{,}793$

или 2-й способ: $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P_4(0) - P_4(1)$

б) $P(X \leq 3) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) = 0{,}8698$

в) $P(X=4) = 0{,}0256$

42. Работают четыре магазина по продаже стиральных машин. Вероятность отказа покупателю в магазинах равна 0,1. Считая, что ассортимент товара в каждом магазине формируется независимо от других, определить вероятность того, что покупатель получит отказ в двух, трех, четырех магазинах.

Решение. Используем формулу Бернулли:

а) $P_4(2) = c_4^2 p^2 q^2 = 0{,}0486$

б) $P_4(3) = c_4^3 p^3 q = 0{,}0036$

в) $P_4(4) = c_4^4 p^4 q^0 = 0{,}0001$

43. В новом микрорайоне поставлено 10 000 кодовых замков на дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна а) 0,0002; б) 0,001. Найти вероятность того, что за месяц откажут два, три и пять замков.

*Решение. а) используем формулу Пуассона. В нашем случае λ =np=10000*0,0002 = 2, тогда*

$$P_{10000}\,(2) = 2^2 * e^{-2} / 2! = 0{,}27$$

$$P_{10000}\,(3) = 2^3 * e^{-2} / 3! = 0{,}18$$

$$P_{10000}\,(5) = 2^5 * e^{-2} / 5! = 0{,}036$$

б) примем $e^{-10} = 0{,}000045$, λ =np=10000*0,001 = 10, тогда

$$P_{10000}\,(2) = 10^2 * e^{-10} / 2! = 0{,}00225$$

$$P_{10000}\,(3) = 10^3 * e^{-10} / 3! = 0{,}0075$$

$$P_{10000}\,(5) = 10^5 * e^{-10} / 5! = 0{,}0375$$

44. Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено: а) ровно три изделия; б) более трех изделий.

Решение. а) используем формулу Пуассона. В нашем случае λ =np=500*0,002 = 1, тогда

$$P_{500}(3) = 1^3 * e^{-1}/3! = 0{,}0615$$

б) Используем формулу Бернулли, с поправкой на противоположное событие:

$P(X>3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - (P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3) =$

$= 1-(e^{-1}+e^{-1}+1/2\,e^{-1}+1/6\,e^{-1}) = 0.98$

45. На станциях отправления поездов находится 1000 автоматов для продажи билетов. Вероятность выхода из строя одного автомата в течение часа равна 0,004. Какова вероятность того, что в течение часа выйдут из строя два, три, пять автоматов?

Решение. используем формулу Пуассона. В нашем случае λ =np=1000*0,004 = 4, тогда

$$P_{1000}(2) = 4^2 * e^{-4}/2! = 0{,}1483$$

$$P_{1000}(3) = 4^3 * e^{-4}/3! = 0{,}1977$$

$$P_{1000}(5) = 4^5 * e^{-4}/5! = 0{,}1582$$

46. Всхожесть семян огурцов равна 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех?

Решение: Используем формулу Бернулли:

$$P(X \ge 4) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 * p^4 * q^1 + C_5^5 * p^5 * q^0 = 5*0{,}8^4*0{,}2 + 1*0{,}8^5 = 0{,}7373$$

47. Обувной магазин продал 200 пар обуви. Вероятность того, что в магазин будет возвращена бракованная пара, равна 0,01. Найти вероятность того, что из проданных пар обуви будет возвращено: а) ровно 4 пары, б) ровно 5 пар.

*Решение: используем формулу Пуассона. В нашем случае λ =np=200*0,01 = 2 тогда*

$$P_{200}(4) = 2^4 * e^{-2}/4! = 0{,}0908$$

$$P_{200}(5) = 2^5 * e^{-2}/5! = 0{,}0363$$

План-конспект занятия №10

Тема: Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Вид занятия*: теоретическое занятие*

Цель занятия: познакомить с основными теоремами ТВиМС.

Задачи:

Учебные: 1) разъяснить основные понятия и теоремы ТВиМС;
2) научить решать задачи на расчет вероятностей с использованием теорем;
3) закрепить знание формул комбинаторики.

Развивающие:
1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти

Воспитательные:
1) воспитание аккуратности и внимательности
2) воспитание вдумчивости при принятии решений

Межпредметные связи:

Математика и Элементы высшей математики; Логика, Алгоритмизация и программирование, Экономика и менеджмент

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Поверка усвоения пройденного материала:

10-15 мин

а) проверка Д.З. (решение у доски с комментариями)

3. Объяснение нового материала (см. лекцию)

40-45 мин

4. Закрепление материала

20-25 мин

(решение задач №№ **48, 50, 52**)

5. Подведение итогов занятия.

1-3 мин

6. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект.
б) решить задачи №№ **49, 51**

Подготовиться к итоговой проверочной работе по изученному разделу.

Тема: Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Выдающаяся роль в развитии ТВ принадлежит знаменитому математику П. Лапласу (1749 – 1827). Он впервые дал стройное и систематическое изложение основ теории вероятностей, привел доказательство одной из форм центральной предельной теоремы (теоремы Моавра – Лапласа) и развил ряд замечательных приложений ТВ к вопросам практики, в частности к анализу ошибок наблюдений и измерений.

Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в *n* независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления событий равна *p*, (*0*< *p* < *1*), событие наступит ровно *k* раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше *n*),

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad \text{где } \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений *x* приводится в приложениях книг по ТВ, для отрицательных значений *x* пользуются этой же таблицей, т.к. функция четная.

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в *n* независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления событий равна *p*, (*0*< *p* < *1*), событие наступит не менее *k1* раз и не более *k* 2 раз, приближенно равна :

$$P(k_1,k_2)=\Phi(x'')-\Phi(x')$$

Где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ - функция Лапласа, $x'=(k_1-np)/\sqrt{npq}$, $x''=(k_2-np)/\sqrt{npq}$

Таблица функции Лапласа для положительных значений x (0 ≤x ≤ 5)приводится в приложениях, для значений x> 5 полагают Ф(x) = 0,5. Для отрицательных значений x используют ту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная.

Задачи практикума.

48. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

Решение: По условию, n = 243, k = 70, p = 0,25, q = 0,75. Так как n = 243 – достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа: X = $\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-243*0.25}{\sqrt{243*0.25*0.75}}=\frac{9.25}{6.75}=1.37$. По таблице приложения находим $\varphi(1.37)=0.1561$. Искомая вероятность $P_{243}(70)=1/6.75*0.1561=0.0231$

49. Найти вероятность того, что событие В наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

Решение: По условию, n = 2400, k = 1400, p = 0,6, q = 0,4. Так как n = 2400 – достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа: X = $\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1400-2400*0,6}{\sqrt{2400*0,6*0,4}} = -\frac{40}{24} = -1,67$. Так как функция $\varphi(x)$ - четная, по таблице приложения находим $\varphi(-1,67) = \varphi(1,67) = 0,0989$. Искомая вероятность $P_{2400}(1400) = 1/24*0.0989 = 0,0041$

50. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

Решение: По условию, n = 100, k = 75, p = 0,8, q = 0,2. Так как n = 100 – достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа: X = $\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{75-100*0,8}{\sqrt{100*0,8*0,2}} = -\frac{5}{4} = -1,25$. Так как функция $\varphi(x)$ - четная, по таблице приложения находим $\varphi(-1,25) = \varphi(1,25) = 0,1826$. Искомая вероятность $P_{100}(75) = 1/4*0,1826 = 0,04565$

51. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна p=0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз;б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

Решение: Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

а) По условию, n = 100, , p = 0,8, q = 0,2 , k1 = 75, k2 = 90. Вычислим x' и x'':

$x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ = $\frac{75-100*0,8}{\sqrt{100*0,8*0,2}} = -1,25$, $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$ = $\frac{90-100*0,8}{\sqrt{100*0,8*0,2}} = 2,5$.

Учитывая, что функция Лапласа нечетна, получим

$$P_{100}(75,90) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882$$

б) Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений может быть 75 либо 76 и т.д. либо 100. Таким образом, следует принять k1 = 75, k2 = 100. Тогда $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ = $\frac{75-100*0,8}{\sqrt{100*0,8*0,2}} = -1,25$, $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$ =

$\frac{100-100*0,8}{\sqrt{100*0,8*0,2}} = 5$. $P_{100}(75,100) = \Phi(5) - \Phi(-1,25) = \Phi(5) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944$

в) События «А появилось не менее 75 раз» и «А появилось не более 74 раз» - противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность $P_{100}(0,74) = 1 - P_{100}(75,100) = 1 - 0,8944 = 0,1056$

52. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз?

Решение. По условию, p = 0,8, q = 0,2 , k1 = 75, k2 = *n*, P_n= P(75,n)=0,9

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P(k_1, n) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi\left[\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right] - \Phi\left[\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right],$$

Подставляя данные задачи, 0,9 = $\Phi\left[\frac{n-0.8n}{\sqrt{n*0.8*0.2}}\right] - \Phi\left[\frac{75-0.8n}{\sqrt{n*0.8*0.2}}\right]$ или

$$0.9 = \Phi\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right] - \Phi\left[\frac{75-0,8*n}{0.4*\sqrt{n}}\right].$$

Очевидно, число испытаний n>75, поэтому $\sqrt{n}\big/_2 > \sqrt{75}\big/_2 \cong 4.33$. Учитывая, что функция Лапласа возрастающая и Φ(4) = 0,5, можно положить $\Phi\left[\sqrt{n}\big/_2\right] = 0.5$. Следовательно, получим $0.9 = 0.5 - \Phi\left[\dfrac{75-0,8n}{0.4\sqrt{n}}\right]$, откуда $\Phi\left[\dfrac{75-0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right] = -0.4$. По таблице найдем Φ(1,28) = 0,4. Отсюда , учитывая, что функция Лапласа нечетная, получим $\dfrac{75-0,8n}{0.4\sqrt{n}} = -1.28$, тогда n=100

Ответ: должно быть 100 испытаний.

План-конспект занятия №11

Тема: Проверочно-итоговая работа по разделу

Тип занятия: *контрольное занятие.*
Цель занятия: контроль ЗУН.
Задачи:
Учебные: 1) закрепить ЗУН расчета вероятностей сложных событий
2) контроль усвоения материала студентами.
Развивающие:
3) развитие логического мышления;
4) развитие памяти
Воспитательные:
5) воспитание самостоятельности и ответственности при решении поставленных задач.
Межпредметные связи:
Математика и Элементы высшей математики; Логика, Алгоритмизация и программирование, Экономика, Менеджмент.

Ход занятия:

1. Оргмомент (взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)
1-3 мин
2. Повторение пройденного материала (проверка Д.З. у доски с четким проговариванием определений и обоснованием решения)
10-15 мин
3. Закрепление материала (решение КР – 30 вариантов)
50-60 мин
4. Подведение итогов занятия и выставление оценок за работу на уроке.
5-7 мин
5. Домашнее задание: (подготовить отчетные работы по предложенному списку, защита работ после предварительной проверки преподавателем будет проходить на проверочно-итоговом занятии по следующему разделу). Реферирование тем «Жизнеописание Я.Бернулли», «П.Лаплас и его вклад в развитие теории вероятностей», «Пуассон и его вклад в развитие теории вероятностей»
3-5 мин

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. В партии из N изделий n изделий имеют скрытый дефект (таб.1). Какова вероятность того, что из взятых наугад m изделий k изделий являются дефектными?

Вариант	N	n	m	k	Вариант	N	n	m	k
1	20	4	5	2	16	20	5	4	1
2	30	5	5	3	17	16	6	5	3
3	20	5	4	2	18	18	5	4	2
4	25	6	5	3	19	14	4	3	1
5	15	4	3	2	20	10	4	3	2
6	20	6	4	1	21	16	5	3	2
7	30	4	3	2	22	20	6	4	3
8	16	4	3	2	23	26	5	4	2
9	18	6	5	3	24	32	8	5	3
10	12	5	4	2	25	34	10	6	4
11	30	10	5	3	26	30	6	5	3
12	26	8	6	4	27	25	5	3	2
13	24	8	5	3	28	24	6	4	3
14	22	6	4	2	29	28	8	5	2
15	20	5	3	2	30	24	6	3	2

2. В магазине выставлены для продажи n изделий, среди которых k изделий некачественные (таб.2). Какова вероятность того, что взятые случайным образом m изделий будут некачественными?

Вариа нт	n	k	m	Вари ант	n	k	m
1	20	6	2	16	15	5	2
2	18	8	3	17	17	6	3
3	16	6	2	18	18	8	4
4	14	5	3	19	20	7	2
5	12	4	3	20	22	6	3
6	10	4	2	21	26	8	2
7	18	6	3	22	28	7	3
8	22	8	2	23	30	10	2
9	24	10	3	24	26	6	2
10	26	6	2	25	28	10	3
11	30	8	3	26	14	5	2
12	25	7	2	27	18	5	3
13	23	6	3	28	16	4	2
14	24	8	2	29	17	3	2
15	30	9	3	30	19	6	3

3. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: n1 с первого завода, n2 – со второго, n3 – с третьего (таб.3). Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе p1, на втором p2, на третьем – p3. Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным?

Вар	n1	p1	n2	p2	n3	p3	Вар	n1	p1	n2	p2	n3	p3
1	25	0,9	35	0,8	40	0,7	16	25	0,9	35	0,8	40	0,7
2	15	0,8	25	0,7	10	0,7	17	15	0,8	25	0,7	20	0,9
3	40	0,9	35	0,7	25	0,9	18	40	0,9	25	0,8	35	0,8
4	25	0,7	10	0,9	15	0,8	19	14	0,8	26	0,6	20	0,7
5	10	0,9	20	0,8	20	0,6	20	18	0,9	32	0,8	30	0,7
6	40	0.8	30	0.8	30	0.9	21	30	0.9	20	0.7	10	0.8
7	20	0.8	50	0.9	30	0.8	22	16	0.9	24	0.8	60	0.9
8	35	0.7	35	0.8	30	0.9	23	30	0.9	10	0.7	10	0.7
9	15	0.9	45	0.8	40	0.9	24	15	0.8	35	0.9	50	0.8
10	40	0.8	15	0.7	45	0.8	25	40	0.8	20	0.8	40	0.9
11	20	0.9	15	0.9	15	0.8	26	10	0.9	20	0.8	10	0.6
12	14	0.8	26	0.9	10	0.8	27	35	0.8	25	0.7	50	0.8
13	16	0.8	40	0.9	44	0.7	28	40	0.8	20	0.9	40	0.8
14	30	0.9	20	0.7	50	0.7	29	30	0.9	40	0.8	30	0.9
15	20	0.8	10	0.9	20	0.9	30	10	0.7	20	0.9	20	0.7

4. В городе N оптовых баз. Вероятность того, что товар требуемого сорта отсутствует на этих базах, одинакова и равна p (таб 4). Найти вероятность того, что товар есть хотя бы на двух базах.

Вариант	N	p	Вариант	N	p
1	3	0,2	16	4	0,15
2	4	0,25	17	3	0,24
3	3	0,1	18	2	0,1
4	5	0,2	19	3	0,12
5	4	0,1	20	4	0,14
6	3	0,2	21	4	0,16
7	4	0,3	22	3	0,15
8	3	0,1	23	3	0,13
9	3	0,12	24	2	0,21
10	4	0,3	25	2	0,16
11	3	0,15	26	3	0,19
12	3	0,18	27	4	0,26
13	4	0,24	28	3	0,14
14	2	0,14	29	2	0,15
15	3	0,16	30	3	0,22

5. (дополнительное) Какова вероятность совпадения дней рождения (день и месяц) у любых двух людей в группе из 40 человек?

План-конспект занятия №12

РАЗДЕЛ 3. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (ДСВ)

Тема : Закон распределения вероятностей случайной величины. Способы задания закона распределения ДСВ

Вид занятия*: теоретическое занятие*

Цель занятия: познакомить с основными теоремами ТВиМС.

Задачи:

Учебные: 1) разъяснить основные понятия, связанные с ДСВ

2) научить решать задачи на запись распределения ДСВ;

3) закрепить знание формул комбинаторики.

Развивающие:

1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти
3) Моделирование вероятностной задачи для ДСВ

Воспитательные:

1) воспитание аккуратности и внимательности
2) воспитание вдумчивости при принятии решений

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Проверка усвоения пройденного материала:

10-15 мин

а) проверка Д.З. (решение у доски с комментариями)

3. Объяснение нового материала (см. лекцию)

40-45 мин

4. Закрепление материала

20-25 мин

(решение задач №№ **53, 58**)

7. Подведение итогов занятия.

1-3 мин

8. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект [3], стр 102-106.

б) решить задачи №№ **54, 57, 59**

Тема: Понятие ДСВ. Распределение ДСВ. Функции от ДСВ

В практической жизни часто приходится сталкиваться с различными величинами. В результате повторения некоторых опытов можно всегда получать одно и то же значение определенной величины, а в результате других значение величины изменяется, причем результат каждого отдельного опыта невозможно предугадать заранее.

Например, позвонив в справочное бюро (что является опытом), можно узнать стоимость авиабилета на выбранный рейс. В этом случае сообщенная конкретная стоимость билета является значением интересующей нас величины. Это значение (стоимость билета) неизменно, сколько бы раз мы ни позвонили в справочное бюро. Если узнавать количество билетов, имеющихся на данный момент в кассе на запланированный рейс, то каждый раз в общем случае будут получены различные ответы, причем неизвестно заранее – какие. В данном опыте (звонок в справочное бюро) значение величины (количество билетов) меняется случайным образом от опыта к опыту. Величины, которые могут принять в результате опыта любое из возможных значений, неизвестно заранее – какое, заслуживают особого внимания.

> _Случайной величиной_ называется величина, которая в результате опыта может принять любое заранее неизвестное значение, но обязательно одно.

При многократном проведении опыта (испытания) в неизменных условиях в общем случае будут получены различные значения случайной величины.

Например, при разовом бросании игрального кубика может появиться одно из чисел: 1,2,3,4,5,6. При повторном бросании возможно появление того же числа, а возможно – и другого.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

<u>*Дискретной случайной величиной*</u> называется такая, значения которой есть конечное или счетное множество фиксированных величин.

Примерами ДСВ являются число студентов, опрошенных на занятии, число солнечных дней в году в солнечной Башкирии и т.д.

<u>*Непрерывной случайной величиной*</u> называют такую величину, которая может принять любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала.

Примерами НСВ служат: время безаварийной работы станка, расход горючего на единицу расстояния, количество осадков, выпавших в сутки.

Случайные величины будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита – X, Y, Z, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами – x, y, z. Например, X – число шахматных партий, окончившихся вничью, из трех сыгранных. В этом случае Величина Ч может принять значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Для описания поведения дискретной случайной величины *X* задают все значения $x_1, x_2, ..., x_n$, которые она может принять, и вероятности появления этих значений $p_1, p_2, ..., p_n$.

<u>*Законом распределения вероятностей*</u> дискретной случайной величины называется последовательность возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей, причем, так как они образуют полную группу, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Про случайную величину говорят, что она подчиняется данному закону распределения:

Закон распределения можно задать, используя табличный, графический или аналитический способ задания.

а) табличный способ – *ряд распределения:*

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

<u>Задача 53</u>. В партии из восьми деталей пять стандартных. Наудачу взяты четыре детали. Построить ряд распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение: Пусть X – число стандартных деталей среди четырех отобранных. Оно может принять следующие 4 значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. Для определения вероятности появления конкретного числа стандартных деталей воспользуемся формулой $P(X=k) = \frac{C_m^k C_{n-m}^{l-k}}{C_n^l}$, где n – число деталей в партии, l – число отобранных деталей, m – число стандартных деталей, k – число стандартных деталей среди отобранных. Отсюда

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 C_3^3}{C_8^4} = 1/14, \qquad P(X=3) = \frac{C_5^3 C_3^1}{C_8^4} = 6/14,$$

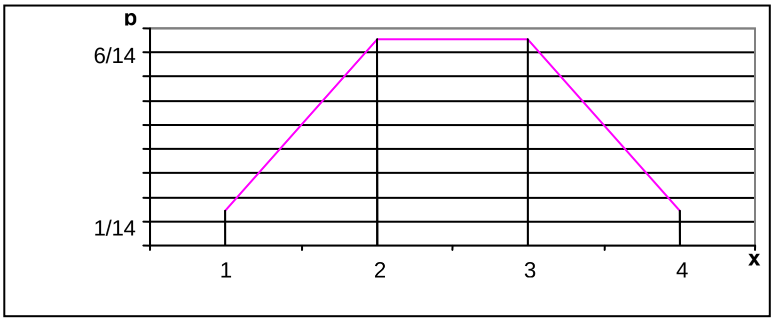
$$P(X=2) = \frac{C_5^2 C_3^2}{C_8^4} = 6/14, \qquad P(X=4) = \frac{C_5^4 C_3^0}{C_8^4} = 1/14$$

Проверим: складывая полученные вероятности, получим 1/14+6/14+6/14+1/14=1. Искомый ряд распределения примет вид:

X	1	2	3	4
P	1/14	6/14	6/14	1/14

б) Ряд распределения можно задать *графически*, откладывая на горизонтальной оси значения *X,* а на вертикальной — соответствующие им значения вероятностей. Соединив точки последовательно отрезками, получим ломаную, которая называется *многоугольником распределения.*

Для <u>*задачи 53*</u> построим многоугольник распределения:



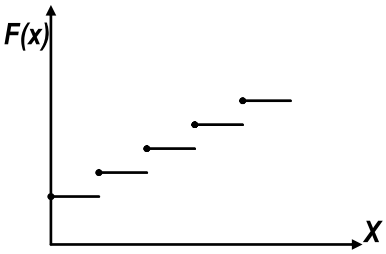
в) Для дискретной случайной величины можно ввести понятие <u>*функции распределения $F(x)$*</u>, которая равна вероятности случайного события, состоящего в том, что дискретная случайная величина X примет одно из возможных значений, меньших некоторого значения x, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Если дискретные значения случайной величины расположены в порядке возрастания $x_2, \ldots, x_n$, то $F(x)$ можно задать в виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \le x_1 \\ p_1 & \text{если } x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{если } x_2 < x \le x_3 \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} & \text{если } x_{n-1} < x \le x_n \\ 1 & \text{если } x > x_n \end{cases}$$

Функцию распределения можно представить графически в виде ступенчатой функции:



План-конспект занятия №13

***<u>Тема:</u>* <u>Решение задач на запись распределения ДСВ</u>**

Тип занятия: *практическое занятие.*
Цель занятия: контроль ЗУН.
Задачи:
Учебные: 1) закрепить ЗУН решения задач на нахождение закона распределения ДСВ в различных вариантах
2) контроль усвоения материала студентами.
Развивающие:
1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти
Воспитательные:
1) воспитание самостоятельности и ответственности при решении поставленных задач.

<u>Ход занятия:</u>

1. Оргмомент (взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)
   1-3 мин
2. Повторение пройденного материала
   - проверка Д.З. у доски с четким проговариванием определений и обоснованием решения)
     10-15 мин
   - решение самостоятельной работы: 1 вар **№55**, 2 вар - **№56**
     10-15 мин
3. Закрепление материала (решение задач № ***62, 64, 66, 68, 72***)
   45-50 мин

4. Подведение итогов занятия и выставление оценок за работу на уроке.

5-7 мин

5. Домашнее задание:
- выучить конспект,
- решение задач № ***63. 65, 67, 69, 73***)
- Реферирование темы «Вклад наших соотечественников в развитие теории вероятностей как науки.»

3-5 мин

Задачи практикума.

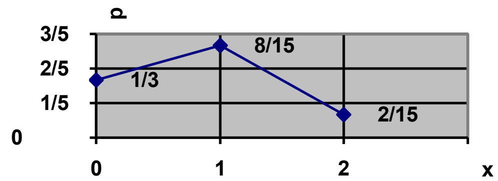
54. Среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билета с выигрышем. На удачу покупают 2 билета. Написать закон распределения вероятностей числа выигрышных билетов среди купленных.

Решение. Пусть X — случайная величина числа выигрышных билетов среди купленных 2 билетов. Очевидно, что она может принимать значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.
Вычисляем соответствующие вероятности:

$$P(X=0)=\frac{C_4^0 C_6^2}{C_{10}^2}=1/3, \qquad P(X=1)=\frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2}=8/15, \qquad P(X=2)=\frac{C_4^2 C_6^0}{C_{10}^2}=2/15,$$

Для проверки сложим 1/3+8/15+2/15 = 1.
Следовательно, искомый закон распределения имеет вид

X	0	1	2
P	5/15	8/15	2/15



План-конспект №14

<u>Тема : Математическое ожидание и дисперсия, их свойства</u>

Вид занятия*: теоретическое занятие*
Цель занятия: познакомить с основными характеристиками ДСВ и их свойствами.
Задачи:
Учебные: 1) разъяснить основные понятия, связанные с характеристиками ДСВ
2) научить решать задачи на вычисление характеристик ДСВ;
3) закрепить знание основных теорем ТВ.
4) Решение вероятностных задач для ДСВ
Развивающие:
1) Расширение кругозора
2) развитие логического мышления;
3) развитие памяти
Воспитательные:
1) воспитание аккуратности и внимательности
2) воспитание вдумчивости при принятии решений

<u>Ход занятия:</u>

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Проверка усвоения пройденного материала:

25-30 мин

а) проверка Д.З. (решение у доски с комментариями)

б) самостоятельная работа в домашних тетрадях:

1 вариант	2 вариант
№ 60	№61
№71	№70

3. Объяснение нового материала (см. лекцию)

25-30 мин

4. Закрепление материала

25-30 мин

(решение задач №№ ***81***)

5. Подведение итогов занятия.

1-3 мин

6. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект.

б) решить задачи №№ ***83, 84***

Тема : Математическое ожидание и дисперсия, их свойства.

Для решения многих практических задач совсем необязательно знать все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, а достаточно указать отдельные числовые параметры, которые позволяют в удобной, компактной форме отразить существенные особенности случайной величины.

Эти характеристики случайной величины, являющиеся не функциями, а числами, называют числовыми характеристиками случайной величины. Их назначение – в сжатой форме выразить наиболее важные черты распределения. К таким числовым характеристикам относятся математическое ожидание, дисперсия, моменты различных порядков и т.д.

Математическое ожидание.

Возможные значения случайной величины могут быть сосредоточены вокруг некоторого центра. Этот центр является некоторым средним значением СВ, вокруг которого группируются остальные ее значения. Для характеристики такой особенности распределения СВ служит математическое ожидание, которое иногда называют центром распределения или средним значением СВ.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма вида

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ , \qquad (**)$$

где x_i — возможные значения дискретной случайной величины;

p_i — вероятность появления значения x_i.

Свойства математического ожидания:

1. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:*

$M(C) = C$, где C — произвольная постоянная величина.

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:*

$$M(CX) = CM(X);$$

3. *Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:*

$$M(X_1 * X_2 * ... * X_n) = M(X_1) * M(X_2) * ... * M(X_n),$$

4. *Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:*

$$M(X_1 + X_2 + ... + Xn) = M(X_1) + M\{X_2) + ... + M(X_n).$$

Дисперсия.

На практике встречаются СВ, имеющие одинаковые математические ожидания, однако принимающие резко отличающиеся значения. Таким образом, математическое ожидание характеризует поведение СВ далеко не полностью.

Приведем пример. Пусть ДСВ X и Y заданы следующими рядами распределения:

X	2	3	4	5
p	0,1	0,2	0,3	0,4

Y	-1	3	8	11
p	0.2	0.5	0.2	0.1

Найдем математическое ожидание этих величин: по определению

$$M(X) = 2 * 0,1 + 3 * 0,2 + 4 * 0,3 + 5 * 0,4 = 4$$

$$M(Y) = -1 * 0,2 + 3 * 0,5 + 8 * 0,2 + 11 * 0,1 = 4.$$

Отложим значения этих величин на числовых осях с одинаковым масштабом. Рассматриваемые СВ имеют одинаковые МО, равные 4 . Однако рассеяние значений СВ X вокруг МО значительно меньше, чем у величины Y.

Таким образом, целесообразно ввести такую характеристику СВ, которая оценивала бы меру рассеивания значений СВ вокруг ее МО, тем более что на практике часто приходится оценивать такое рассеяние. Например, артиллеристам необходимо знать, как кучно лягут снаряды вблизи цели, по которой ведется стрельба.

Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат, в частности, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией случайной величины *X* называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсию целесообразно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Свойства дисперсии:

1 . *Дисперсия постоянной равна нулю:*

$$D(C) = 0;$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:*

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

3. *Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:*

$$D(X_1 + X_2 + ...+X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n),$$

Если СВ и ее МО имеют одну и ту же размерность, то дисперсия имеет размерность квадрата СВ. Этого недостатка можно избежать, если воспользоваться средним квадратическим отклонением СВ, которым является арифметический корень из дисперсии.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

План-конспект занятия №15

***Тема занятия:* Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины**

Тип занятия: *практическое занятие.*
Цель занятия: закрепление и контроль ЗУН.
Задачи:
Учебные: 1) закрепить ЗУН решения задач на нахождение характеристик ДСВ в различных вариантах
2) контроль усвоения материала студентами.
Развивающие:
1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти
Воспитательные:
1) воспитание самостоятельности и ответственности при решении поставленных задач.

Ход занятия:

1. Оргмомент (взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

1-3 мин

2. Повторение пройденного материала

10-15 мин

- проверка Д.З. у доски с четким проговариванием определений и обоснованием решения)

3. Закрепление материала (решение задач ***№ 82,86 а***)

45-50 мин

4. Подведение итогов занятия и выставление оценок за работу на уроке.

5-7 мин

5. Домашнее задание:

3-5 мин

- выучить конспект,
- решение задач № ***85, 86 б, 87***)

81. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X	2	4	6	8
p	0,4	0,2	0,1	0,3

Y	0	1	2
P	0,5	0,2	0,3

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 2X + 3Y$.

Решение. Используя свойства математического ожидания и дисперсии, а также учитывая, что X и Y — независимые случайные величины, имеем:

$M(Z) = M(2X + 3Y) = M(2X) + M(3Y) = 2M(X) + 3M(Y)$;

$D(Z) = D(2X + 3Y) = D(2X) + D(3Y) = 4D(X) + 9D(Y)$

По формуле (**) вычислим $M(X)$ и $M(Y)$:

$M(X) = 2*0.4+4*0.2+6*0.1+8*0.3 = 4.6$;

$M(У) = 0*0.5+1*0.2+2*0.3 = 0.8$

Тогда $M(Z) = 2*4.6+3*0.8 = 11.6$

Вычислим $D(X)$ и $D(Y)$. Вначале найдем $M(X^2)$ и $M(У^2)$:

$M(X^2)$ $4*0.4+16*0.2+36*0.1+64*0.3 = 27.6$;

$M(У^2) = 0*0.5+1*0.2+4*0.3 = 1.4$

Затем определим $D\{X)$ и $D(Y)$:

$D\{X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 27,6 - 4,6^2 = 6,44$;

$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 1,4 - 0,8^2 = 0,76$.

Окончательно получим

$D(Z) = 4*6.44+9*0.76 = 32.6$

План-конспект №16

Тема Виды распределений ДСВ

Вид занятия: *теоретическое занятие*

Цель занятия: познакомить с основными видами распределений ДСВ и их свойствами.

Задачи:

Учебные: 1) разъяснить основные понятия, связанные с видами и с характеристиками ДСВ

2) научить решать задачи на вычисление характеристик ДСВ;

3) закрепить знание основных теорем ТВ.

4) Моделирование вероятностной задачи

Развивающие:

1) Расширение кругозора
2) развитие логического мышления;

3) развитие памяти

Воспитательные:

1) воспитание аккуратности и внимательности
2) воспитание вдумчивости при принятии решений

<u>Ход занятия:</u>

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Проверка усвоения пройденного материала:

25-30 мин

- проверка Д.З. (решение у доски с комментариями)

3. Объяснение нового материала (см. лекцию)

25-30 мин

4. Закрепление материала

25-30 мин

(решение задач №№ ***82, 88***)

5. Подведение итогов занятия.

1-3 мин

6. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект[3], стр 118-130.

б) решить задачи №№ *85, 86*

<u>Тема Виды распределений ДСВ</u>

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться либо не появиться. Пусть, далее, вероятность p появления события А в единичном испытании постоянна и не меняется от испытания к испытанию. Рассмотрим в качестве дискретной величины X число появлений события А в этих испытаниях. Формула, позволяющая найти вероятность появления m раз события А в n независимых испытаниях была ранее изучена (формула Бернулли).

Дискретная случайная величина X, которая может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностью

$$P_n(m) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

где $p + q = 1$, $p>0$, $q > 0$, $m = 0,1,2,\ldots,n$, называется **<u>распределенной по биноминальному закону</u>**, а p – параметром биноминального распределения.

<u>Математическое ожидание</u> биноминального распределения равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании:

M(X) = np, где X — дискретная случайная величина;

<u>Дисперсия</u> биноминального распределения равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

D(X) = npq,

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то в силу возникающих вычислительных трудностей нецелесообразно использовать формулу Бернулли, и используют приближенную асимптотическую формулу Пуассона.

Дискретная величина X, которая может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностями

$$P_m = P(X = m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

где m – число появления события в n независимых испытаниях, $\lambda = np$ (среднее число появления события в n испытаниях), называется **<u>распределенной по закону Пуассона</u>** с параметром λ .

В отличие от биноманального распределения, здесь СВ может принимать бесконечное множество значений, представляющее собой бесконечную последовательность целых чисел 0, 1, 2, 3, …

Закон Пуассона описывает число событий *m*, происходящих за одинаковые промежутки времени. При этом предполагается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, которая характеризуется параметром $\lambda = np$. Так как для распределения Пуассона вероятность *p* появления события в каждом испытании мала, то это распределение *называют законом распределения редких явлений*.

Примерами ситуаций, в которых возникает распределение Пуассона, могут служить распределения числа определенных микробов в единице объема, числа вылетевших электронов с накаленного катода за единицу времени, числа α-частиц, испускаемых радиоактивным источником за определенный промежуток времени, числа вызовов, поступающих на телефонную станцию за определенное время суток.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру этого распределения $\lambda = np$ (произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании):

$$M(X) = D(X) = \lambda = np$$, где X — дискретная случайная величина;

В этом и состоит отличительная особенность пуассоновского распределения, которая часто применяется на практике.

План-конспект №17

Тема Формулы для вычисления характеристик ДСВ для различных видов распределений

Вид занятия*: теоретическое занятие*

Цель занятия: познакомить с основными видами распределений ДСВ и их свойствами.

Задачи:

Учебные: 1) разъяснить основные понятия, связанные с видами и с характеристиками ДСВ
2) научить решать задачи на вычисление характеристик ДСВ;
3) закрепить знание основных теорем ТВ.
4)Решение вероятностных задач для различных видов распределений ДСВ

Развивающие:

4) Расширение кругозора
5) развитие логического мышления;
6) развитие памяти

Воспитательные:

3) воспитание аккуратности и внимательности
4) воспитание вдумчивости при принятии решений

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Проверка усвоения пройденного материала:

25-30 мин

- проверка Д.З. (решение у доски с комментариями)

3. Объяснение нового материала (см. лекцию)

25-30 мин

4. Закрепление материала

25-30 мин

(решение задач №№ ***82, 88***)

5. Подведение итогов занятия.

1-3 мин

6. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект.
б) решить задачи №№ *85, 86*

Задачи практикума:

82. Два консервных завода поставляют продукцию в магазин в пропорции 2:3. Доля продукции высшего качества на первом заводе составляет 90% , а на втором — 80% . В магазине куплено 3 банки консервов.

Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа банок с продукцией высшего качества.

Решение. *1 способ (рассмотрен на предыдущем занятии)* Вначале составим закон распределения случайной величины X — числа банок с продукцией высшего качества среди купленных трех банок. Вероятность появления события A — куплена банка с продукцией высшего качества — найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = 0{,}9(2/5) + 0{,}8(3/5) = 0{,}84.$$

Закон распределения случайной величины X можно определить, используя формулу Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m\, p^m q^{n-m}.$$

Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3. Закон ее распределения (с учетом того, что $p = 0{,}84$, $q = 0{,}16$) примет вид

X	0	1	2	3
p	0,004	0,066	0,337	0,593

Тогда

$M(X) = 0*0.004 + 1*0.066 + 2*0.337 + 3*0.593 = 2.519,$

$D(X) = 1*0.066 + 4*0.337 + 9*0.593 - 2.519^2 = 0.406$

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}406} \approx 0{,}64.$

2-ой способ: из свойств биноминального распределения

M(X) = np = 3*0,84 = 2,52, D(X) = npq = 3*0.84*0.16 = 0.4032

85. Два товароведа проверяют партию изделий. Производительность их труда соотносится как 5:4. Вероятность определения брака первым товароведом составляет 85%, вторым — 90%. Из проверенных изделий отбирают четыре. Найти а) математическое ожидание и б) дисперсию числа годных изделий среди отобранных.

Решение. *1 способ (рассмотрен на предыдущем занятии)* Вначале составим закон распределения случайной величины X — числа годных изделий среди отобранных. Вероятность появления события A — отобрано годное изделие — найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = 0{,}85 * (5/9) + 0{,}9 * (4/9) = 0{,}872.$$

Закон распределения случайной величины X можно определить, используя формулу Бернулли $P_n(m) = C_n^m\, p^m q^{n-m}.$

Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4. Закон ее распределения (с учетом того, что $p = 0{,}87$, $q = 0{,}13$) примет вид

X	0	1	2	3	4
p	0,0003	0,0076	0,0767	0,3424	0,573

Тогда $M(X) = 0*0{,}0003 + 1*0{,}0076 + 2*0{,}0767 + 3*0{,}3424 + 4*0{,}573 = 3{,}4802,$

$D(X) = 0*0{,}0003 + 1*0{,}0076 + 4*0{,}0767 + 9*0{,}3424 + 16*0{,}573 - 3{,}4802^2 = 0{,}4522$

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}4522} \approx 0{,}21.$

2-ой способ: из свойств биноминального распределения

M(X) = 4*0,872 = 3,488

D(X) = 4 * 0,872 * 0,128 = 0,4465

План-конспект занятия №18

Тема занятия: Проверочно-итоговое занятие по разделу

Тип занятия: *контрольное занятие.*

Цель занятия: закрепление и контроль ЗУН.

Задачи:

Учебные: 1) закрепить ЗУН решения задач на нахождение характеристик ДСВ в различных вариантах

2) контроль усвоения материала студентами.

Развивающие:

1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти
3) развитие умения выступать с докладом.

Воспитательные:

1) воспитание самостоятельности и ответственности при решении поставленных задач.

Ход занятия:

1. Оргмомент (взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

1-3 мин

2. Повторение пройденного материала

10-15 мин

- проверка Д.З. у доски с четким проговариванием определений и обоснованием решения)

3. Самостоятельная работа (решение задач *№ 87*)

10-15 мин

4. Защита рефератов, выполненных ранее

45-50 мин

5. Подведение итогов занятия и выставление оценок за работу на уроке.

3-5 мин

6. Домашнее задание:

1-3 мин

- выучить конспект
- Реферирование темы «Виды распределений случайных величин»

ПЕРЕЧЕНЬ ОТЧЕТНЫХ РАБОТ СТУДЕНТОВ.

№	Тема	ФИО	Оценка
1.	Жизнеописание Я.Бернулли.		
2.	Байес и его вклад в теорию вероятностей.		
3.	История возникновения и развития теории вероятностей.		
4.	Необычные области применения математической статистики.		
5.	Виды распределений случайных величин.		
6.	Статистические оценки параметров распределения и их приложения.		
7.	Метод статистических испытаний и его применение.		
8.	Вклад наших соотечественников в развитие теории вероятностей как науки.		
9.	Мир, построенный на вероятности.		
10.	П. Лаплас и его вклад в развитие теории вероятностей.		
11.	С. Пуассон и его вклад в развитие теории вероятностей.		
12.	Муавр и его вклад в развитие теории вероятностей.		
13.	К Гаусс и его метод наименьших квадратов.		
14.	Петербургская математическая школа и ее вклад в развитие ТВ.		
15.	Развитие теории вероятностей в XX веке.		

План-конспект занятия №19

РАЗДЕЛ 4. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (НСВ)

Тема: Понятие НСВ, плотности распределения НСВ

Вид занятия*: теоретическое занятие*

Цель занятия: познакомить с основными понятиями и теоремами ТВиМС.

Задачи:

Учебные: 1) разъяснить основные понятия, связанные с НСВ
2) научить решать задачи на запись распределения НСВ;
3) закрепить знание формул комбинаторики.

Развивающие:

1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти

Воспитательные:

1) воспитание аккуратности и внимательности

2) воспитание вдумчивости при принятии решений

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Проверка усвоения пройденного материала:

3-5 мин

Беседа-повторение и обобщение темы «Дискретные случайные величины»

3. Объяснение нового материала (см. лекцию)

50-55 мин

4. Закрепление материала

20-25 мин

(решение задач №№ **94, 95**)

5. Подведение итогов занятия.

1-3 мин

6. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект [3], стр 130-132.

б) решить задачи №№ **96, 97**

Тема : Понятие НСВ, их характеристики

Непрерывные случайные величины характеризуются тем, что их значения могут сколь угодно мало отличаться друг от друга.

Вероятность события $X < x$ (где X — значение непрерывной случайной величины, а x — произвольно задаваемое значение), рассматриваемая как функция от x, называется *функцией распределения вероятностей*:

$$F(x) = P(X < x).$$

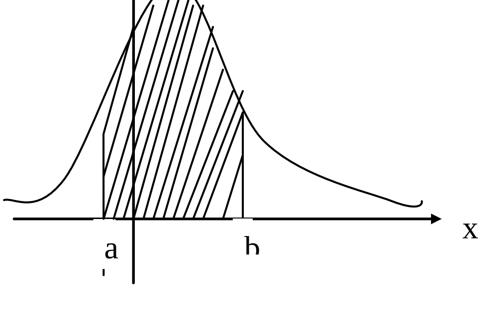
Производная от функции распределения вероятностей называется *функцией плотности распределения вероятностей* или плотностью вероятности:

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

- Плотность распределения неотрицательна, т.е. $f(x) >= 0$
- Вероятность попадания случайной величины в интервал (x_1 , x_2) равна приращению функции распределения вероятностей на этом интервале:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = .\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$



Формула (1) имеет простой геометрический смысл: Вероятность P ($x_1 < X < x_2$) численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x), осью Ox и прямыми $x=x_1$ и $x=x_2$.

- Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad (2)$$

- В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1 \qquad (3)$$

Если интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ выражает вероятность попадания случайной величины в интервал]a,b[, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ определяет вероятность такого попадания в интервал $]-\infty,+\infty[$. С другой стороны, в результате опыта случайная величина обязательно примет какое-нибудь значение и это значение несомненно окажется в интервале $]-\infty,+\infty[$, т.е. произойдет заведомо достоверное событие, вероятность которого равна единице.

Геометрически равенство (2) означает, что площадь, ограниченная осью Ох и кривой распределения, равна единице.

- Функция распределения вероятностей выражается через плотность вероятности в виде интеграла:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

План-конспект занятия№20

***Тема:* Решение задач на вычисление вероятности НСВ**

Тип занятия: *практическое занятие.*
Цель занятия: контроль ЗУН.
Задачи:
Учебные: 1) закрепить ЗУН решения задач на вычисление вероятности НСВ в различных вариантах
2)Выполнение упражнений на закрепление материала по теме «НСВ»
3) контроль усвоения материала студентами.
Развивающие:
1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти
Воспитательные:
1) воспитание самостоятельности и ответственности при решении поставленных задач.

Ход занятия:

1. Оргмомент (взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

1-3 мин

2. Повторение пройденного материала

- проверка Д.З. у доски с четким проговариванием определений и обоснованием решения)

10-15 мин

- решение самостоятельной работы: 1 вар **№98**, 2 вар - **№99**

10-15 мин

3. Закрепление материала (решение задач № **100, 101**)

45-50 мин

4. Подведение итогов занятия и выставление оценок за работу на уроке.

5-7 мин

5. Домашнее задание:

⅏выучить конспект [3], стр 130-132,
⅏решение задач № **102**

3-5 мин

94. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2, \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности f(x) и вероятность попадания случайной величины X в интервалы (1; 2,5), (2,5; 3,5).

Решение: Плотность вероятности находим по формуле f(x) = F‘ (x):

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2, \\ (2x-4), & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Вероятности попадания случайной величины X в интервалы вычисляем по формуле:
$P(1 < X < 2{,}5) = F(2{,}5) - F(l) = 0{,}5^2 - 0 = 0{,}25$;
$P(2{,}5 < X < 3{,}5) = F(3{,}5) - F(2{,}5) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

95. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1, \\ (x - 1/2), & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 0, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

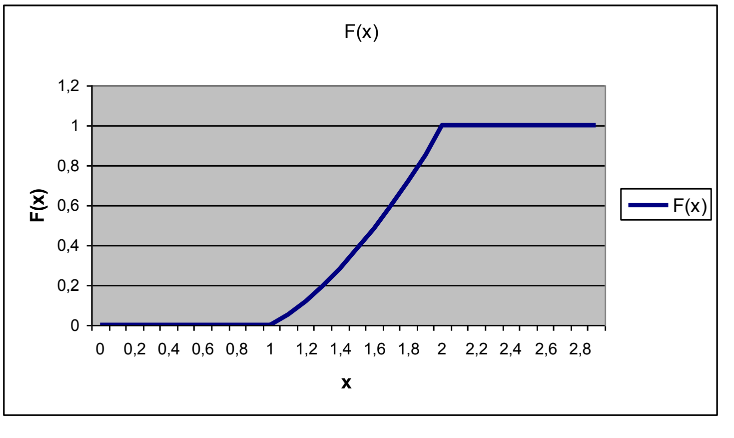
Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

Решение: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$, если $x \le 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{x} f(x)dx = 0 + x^2/2 - (1/2)x = (x^2 - x)/2,$$ если. $1 < x \le 2$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{x} f(x)dx = (x^2 - x)/2 \Big|_1^2 = 1,$$

если $x > 2$



Тема: Характеристики НСВ, их свойства

Вид занятия*: теоретическое занятие*
Цель занятия: познакомить с основными характеристиками НСВ и способами их вычисления.
Задачи:
Учебные: 1) разъяснить основные понятия, связанные с НСВ
2) научить решать задачи на вычисление характеристик НСВ;
3) закрепить знание высшей математики.
4) Моделирование вероятностной задачи на поиск характеристик НСВ
Развивающие:
1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти
Воспитательные:
1) воспитание аккуратности и внимательности
2) воспитание вдумчивости при принятии решений

Ход занятия:

1.Организационный момент — 1-3 мин
(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)
2. Проверка усвоения пройденного материала: — 3-5 мин
Беседа-повторение и обобщение темы «Характеристики ДСВ»
3. Объяснение нового материала (см. лекцию) — 50-55 мин
4. Закрепление материала — 20-25 мин
(решение задач №№ **103, 105, 106**)
5. Подведение итогов занятия. — 1-3 мин
6.Домашнее задание: — 1-3мин
а) выучить конспект[3], стр 132-136.
б) решить задачи №№ **104, 108**

Математическое ожидание и дисперсия. Мода и медиана

Средним значением или *математическим ожиданием* непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$M(X) = M_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

где $f(x)$ — плотность вероятности.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$D(X) = D_X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_x)^2 f(x)dx.$$

Для определения дисперсии может быть также использована формула

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx. - M_x^2$$

Модой $Mo\{X)$ непрерывной случайной величины X называется такое значение этой величины, плотность вероятности которого максимальна.

Медианой Me(X) непрерывной случайной величины *X* называется такое ее значение, при котором выполняется равенство

$$P(X < Me) = P(X > Me).$$

План-конспект занятия №22

Тема: Формулы для вычисления характеристик НСВ

Тип занятия: *теоретическое занятие.*

Цель занятия: контроль ЗУН.

Задачи:

Учебные: 1) закрепить ЗУН решения задач на вычисление характеристик НСВ в различных вариантах

2) контроль усвоения материала студентами.

Развивающие:

1) развитие логического мышления;

2) развитие памяти

Воспитательные:

1) воспитание самостоятельности и ответственности при решении поставленных задач.

Ход занятия:

1. Оргмомент (взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

1-3 мин

2. Повторение пройденного материала

- проверка Д.З. у доски с четким проговариванием определений и обоснованием решения)

10-15 мин

3. Закрепление материала (решение задач № **107, 109**)

30 мин

4. Решение самостоятельной работы:

1 вар **№110, 112**, 2 вар - **№111,113**

35-40 мин

5Подведение итогов занятия и выставление оценок за работу на уроке.

5-7 мин

6. Домашнее задание:

- выучить конспект,
- решение задач № **108)**

3-5 мин

103. Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = x/2 в интервале (0; 2), вне этого интервала f(x) = 0. Найти математическое ожидание величины X.

Решение. На основании формулы получаем:

$$M_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x*1/2xdx = \int_0^2 x^2/2dx = \frac{x^3}{3*2}\Big|_0^2 = 4/3$$

107. Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = - 3/4 x^2 + 6 *x – 45/4 на интервале (3; 5). Вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду, медиану и математическое ожидание.

Указание. *Для нахождения моды можно использовать необходимое и достаточные условия экстремума функции. Для нахождения медианы нужно учесть симметричность параболы относительно ее оси.*

Решение. На основании формулы получаем:

$$M_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_3^5 x*(-3/4x^2+6x-45/4)dx = \int_3^5 (-3/4x^3+6x^2-45/4x)dx =$$

$$= -3/4*(1/4)*x^4+6*1/3*x^3-45/4*(1/2)*x^2\Big|_3^5 = -3/16*x^4+2*x^3-45/8*x^2\Big|_3^5 = 4$$

Мода находится как значение X, при котором плотность вероятности максимальна, т.е. f(x)=max, следовательно, надо найти экстремум параболы (через производную): f'(x) = -3/4*2*x + 6 = -1,5x + 6. f'(x) = 0 при x = -6 / (-1,5) = 4, т.е. Mo(x) = 4.

Согласно определению медианы, ее значением будет ось симметрии параболы, задающей плотность вероятности на отрезке (3, 5) – это x=4, т.е Me(x) = 4.

План-конспект занятия №23

Тема : Виды распределений НСВ, их свойства

Вид занятия*: теоретическое занятие*

Цель занятия: познакомить с основными свойствами распределений НСВ.

Задачи:

Учебные: 1) разъяснить основные понятия, связанные с распределениями ДСВ

2) научить решать задачи на запись распределения ДСВ;

Развивающие:

1. развитие логического мышления;
2. развитие памяти

Воспитательные:

1. воспитание аккуратности и внимательности
2. воспитание вдумчивости при принятии решений

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Проверка усвоения пройденного материала:

10-15 мин

а) проверка Д.З. (решение у доски с комментариями)

3. Объяснение нового материала (см. лекцию)

40-45 мин

4. Закрепление материала

20-25 мин

(решение задач №№ **114, 116, 117, 120, 122, 123, 124 ,126, 129, 131**)

5.Подведение итогов занятия.

1-3 мин

6. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект [3], стр 136-142.

б) решить задачи №№ **115, 118, 119,121, 125, 127, 128, 130, 132**

Равномерное распределение.

Непрерывная случайная величина называется **равномерно распределенной** на отрезке [а, Ь], если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ если } a < x \le b, \\ 0, \text{ если } x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины определяются выражениями

$$M(x) = \frac{a+b}{2} \qquad D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Нормальное распределение

Случайная величина X распределена по **нормальному закону**, если ее функция плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

где M_x — математическое ожидание; σ_x — среднее квадратичное отклонение.

Вероятность попадания случайной величины в интервал (а, Ь) находится по формуле

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a-M_x}{\sigma_x}\right) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция Лапласа.

Значения функции Лапласа для различных значений приведены в Приложении

Показательное распределение

Распределение непрерывной случайной величины X называется ***показательным (экспоненциальным)***, если плотность вероятности этой величины описывается функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

где λ — положительное число.

Соответственно, функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

ВЫВОДЫ:

- **Вероятность попадания в интервал (a,b) непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону,**

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

- **Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение показательного распределения соответственно равны:**

$$M_x = 1/\lambda; \quad D_X = 1/\lambda^2; \quad \sigma_x = 1/\lambda$$

- **Таким образом, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.**

План-конспект занятия №24

Тема : Вычисление вероятностей сложных событий с использованием законов распределения НСВ. Проверочно-итоговое занятие по разделу

Вид занятия*: теоретическое занятие*

Цель занятия: контроль ЗУН

Задачи:

Учебные: 1) Вычисление вероятностей сложных событий с использованием законов распределения НСВ

2). Проверочно-итоговое испытание по разделу

Развивающие:

1 развитие логического мышления;

2 развитие памяти

Воспитательные:

1 воспитание аккуратности и внимательности;

2 воспитание вдумчивости при принятии решений.

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Проверка усвоения пройденного материала:

10-15 мин

а) проверка Д.З. (решение у доски с комментариями)

3. Объяснение нового материала (см. лекцию)

40-45 мин

4. Закрепление материала

20-25 мин

(решение задач №№ **122, 123, 124 ,126**)

5.Подведение итогов занятия.

1-3 мин

6. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект.

б) решить задачи №№ **125, 127, 128**

114. Случайная величина Х распределена равномерно на отрезке [1; 6]. Найти функцию распределения F(x), математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение величины.

Решение. Плотность вероятности для величины Х имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 1, \\ 1/5, \quad \text{если } 1 < x \le 6, \\ 0, \text{ если } x > 6. \end{cases}$$

Следовательно, функция распределения, вычисляемая по формуле

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, запишется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 1, \\ 1/5 \int_{1}^{x} f(x)dx = 1/5\, x \,\Big|_1^x = \dfrac{x-1}{5}, \quad \text{если } 1 < x \le 6, \\ 1, \text{ если } x > 6. \end{cases}$$

Математическое ожидание будет равно Mx = (1 + 6)/2 = 3,5.

Находим дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

$Dx = (6 - 1)^2/12 = 25/12$, $\sigma_x = 5\sqrt{3}/2$.

115. Случайная величина Х распределена равномерно на отрезке [0; 4]. Найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение величины Х.

Решение. Плотность вероятности для величины Х имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 1/4, \quad \text{если } 0 < x \le 4, \\ 0, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Следовательно, функция распределения, вычисляемая по формуле

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, запишется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 1/4 \int_0^x f(x)dx = 1/4\, x\,|_0^x = \dfrac{x}{4}, & \text{если } 0 < x \le 4, \\ 1, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Математическое ожидание будет равно Mx = (0 + 4)/2 = 2 .

Находим дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

Dx = $(4 - 0)^2/12$ = 16/12 = 4/3, $\sigma_x = 2\sqrt{3}$.

116. Автобусы подходят к остановке с интервалом в 5 мин. Считая, что случайная величина X — время ожидания автобуса — распределена равномерно, найти среднее время ожидания (математическое ожидание) и среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Решение. Плотность вероятности для величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 1/5, & \text{если } 0 < x \le 5, \\ 0, \text{ если } x > 5. \end{cases}$$

Следовательно, функция распределения, вычисляемая по формуле

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, запишется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 1/5 \int_1^x f(x)dx = 1/5\, x\,|_1^x = \dfrac{x-1}{5}, & \text{если } 0 < x \le 5, \\ 1, \text{ если } x > 5. \end{cases}$$

Математическое ожидание будет равно Mx = (0 + 5)/2 = 2,5 (мин).

Находим дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

Dx = $(5 - 0)^2/12$ = 25/12, $\sigma_x = 5\sqrt{3}/2$ (мин).

117. Для условия предыдущей задачи найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

Решение. Плотность вероятности для величины X имеет вид

$$P(x < 3) = \int_0^3 f(x)dx = 1/5x\,|_0^3 = 1/5*3 = 0.6$$

126. Известно, что средний расход удобрений на один гектар пашни составляет 80 кг, а среднее квадратичное отклонение расхода равно 5 кг. Считая расход удобрений нормально распределенной случайной величиной, определить диапазон, в который вносимая доза удобрений попадает с вероятностью 0,98.

Решение. Так как P(a < X < b) = $\Phi\left(\frac{b-M_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{a-M_x}{\sigma_x}\right)=\Phi(z_2)-\Phi(z_1)$, то, учитывая симметричность отрезка, т.е. что *a* = *Mx* - α, *a* $b=Mx+\alpha$, получим: P=$\Phi\left(\frac{M_x+\alpha-M_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{M_x-\alpha-M_x}{\sigma_x}\right)=\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{-\alpha}{\sigma_x}\right)=2*\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_x}\right)$ в силу нечетности функции Лапласа, т.е. P=2*Φ(α/5) = 0,98 (по условию). Отсюда Φ(α/5) = 0,98/ 2 = 0,49. По таблице функции Лапласа находим значение (α/5), соответствующее полученному значению функции Φ(α/5) = 0,49: α/5 = 2,33. Отсюда α = 5 * 2,33 = 11,65. Искомый интервал будет иметь вид (68,35; 91,65).

131. Найти вероятность попадания случайной величины t, имеющей показательное распределение

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \le 0, \\ 0{,}2e^{-0{,}2t}, & \text{если } t > 0, \end{cases}$$

в интервал (4; 10).

Решение. Для решения задачи используем формуле: ***P (x₁ <X<x₂) = F(x₂) - F(x₁) =***

$$. = \int_a^b f(x)dx = \int_4^{10} 0{,}2e^{-0{,}2t}dt =$$

$$= -\int_4^{10} e^{-0{,}2t}d(-0.2t) = -e^{-0.2t}\Big|_4^{10} = -e^{-0.2*10}+e^{-0.2*4} = e^{-0.8}-e^{-2} \approx 0.314$$

132. Найти вероятность попадания случайной величины X с показательным распределением, приведенным в задаче 130, в интервал (2; 5).

Решение. Для решения задачи используем формуле: ***P (x₁ <X<x₂) = F(x₂) - F(x₁) = . =***

$$\int_a^b f(x)dx = \int_2^5 0{,}4e^{-0{,}4t}dt = -\int_2^5 e^{-0{,}4t}d(-0.4t) = -e^{-0.4t}\Big|_2^5 = -e^{-0.4*5}+e^{-0.4*2} = e^{-0.8}-e^{-2} \approx 0.314$$

План-конспект занятия №25

Тема : Центральная предельная теорема. Закон больших чисел

Вид занятия*: теоретическое занятие*

Цель занятия: познакомить с основными теоремами ТВиМС.

Задачи:

Учебные: 1) разъяснить основные понятия, связанные со случайными величинами
2) познакомить с основополагающими теремами и неравенствами, устанавливающими связь между случайностью и необходимостью.
3) Моделирование вероятностной задачи подтверждения гипотезы больших чисел

Развивающие:
1) развитие логического мышления;
2) развитие памяти

Воспитательные:
1) воспитание аккуратности и внимательности
2) воспитание вдумчивости при принятии решений

Ход занятия:

1.Организационный момент 1-3 мин
(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Проверка усвоения пройденного материала: 10-15 мин
а) проверка Д.З. (решение у доски с комментариями)

3. Объяснение нового материала (см. лекцию) 60-65 мин

4.Подведение итогов занятия.

1-3 мин

5. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект[3], стр 148-180
б) подготовиться к проверочному уроку!
в) решить задачу **№133,134**

Центральная предельная теорема.
Закон больших чисел.

При изучении теории вероятностей приходится использовать понятия случайного события и случайной величины. При этом предсказать заранее результат испытания, в котором может появиться или не появиться то или иное событие или какое – либо определенное значение случайной величины, невозможно, так как исход испытания зависит от многих случайных причин, не поддающихся учету.

Однако при неоднократном повторении испытаний могут наблюдаться определенные закономерности. Эти *закономерности* , свойственные массовым случайным явлениям, и изучает теория вероятностей. Следует отметить, что математические законы теории вероятностей получены в результате абстрагирования реальных ситуаций, в которых наблюдаются случайные массовые явления.

При изучении результатов наблюдений над реальными случайными массовыми явлениями также имеют место некоторые закономерности. Следует обратить внимание на то, что они обладают **свойством устойчивости**. Суть этого свойства состоит в том, что конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате большой массы подобных явлений, а характеристики случайных событий и случайных величин, наблюдаемых в испытаниях, при неограниченном увеличении числа испытаний становятся практически не случайными.

Предельные теоремы вероятностей устанавливают **зависимость между случайностью и необходимостью**. По смыслу их можно разбить на две группы, одна из которых называется *законом больших чисел*, а другая – *центральной предельной теоремой*.

Под законом больших чисел не следует понимать какой-то один общий закон, связанный с большими числами. Закон больших чисел – это обобщенное название нескольких теорем, из которых следует, что при неограниченном увеличении числа испытаний средние величины стремятся к некоторым постоянным.

Теорема Чебышева

Теорема Чебышева. *Если дисперсии независимых случайных величин X_1, X_2, ..., Xn не превышают постоянного числа В , то для произвольного сколько угодно малого числа* $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{x_i}}{n}\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

Рекомендации: Вывести эту формулировку, основываясь на знаниях по предмету Элементы высшей математики, понятии среднего арифметического и предела функции, а также достоверного события.

Как следует из данной теоремы, среднее арифметическое случайных величин. При возрастании их числа проявляет свойство устойчивости, т.е. стремится по вероятности к неслучайной величине, которой является среднее арифметическое математических ожиданий этих величин.

Замечание. Не следует считать, что предел величины $\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right|\right)=\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}M_{x_i}}{n}\right|\right)$. Это равенство означает, что вероятность отклонения по абсолютной величине $\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right|\right)$ от $\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}M_{x_i}}{n}\right|\right)$ меньше чем на ε при неограниченном возрастании n стремится к 1.

Теорема Чебышева имеет большое практическое применение. Она позволяет, используя среднее арифметическое, получить представление о величине математического ожидания, и наоборот.

Так, измеряя какой-либо параметр с помощью прибора, не дающего систематической погрешности, можно получить достаточно большое число результатов измерений, среднее арифметическое которых по теореме Чебышева будет практически мало отличаться от истинного значения параметра. (вспомните проведение опытов по физике!).

Статистическая вероятность.

Ранее для непосредственного нахождения вероятности события использовалась формула P(A) = m/n, которая предполагает выполнение определенных условий. Например, было нужно, чтобы опыт сводился к схеме случаев. Последнее означает, что среди всех возможных событий, появляющихся в результате данного опыта, можно выделить полную группу попарно несовместных и равновозможных событий. Однако на практике такую группу зачастую бывает выделить трудно. Известно много опытов, результаты которых оказались непредсказуемыми, хотя, казалось бы, были предусмотрены все его исходы. Например, любой полет в космос можно считать опытом (испытанием). Однако вряд ли кто возьмет на себя смелость представить результат этого опыта в виде полной совокупности исходов. Невозможность представить во многих случаях результат опыта в виде полной группы событий является одним из недостатков классической формулы вероятности.

Не менее серьезным недостатком является трудность обоснования равновозможных событий. Определяя некоторые события как равновозможные, обычно руководствуются соображениями симметрии. Но симметричность условий опыта на практике наблюдается только в искусственно организованных опытах. Так, например, при бросании игрального кубика или монеты считается. Что эти объекты симметричны, изготовлены из однородного материала и т.д. Однако не всякая ситуация позволяет сделать подобные предположения и, следовательно, воспользоваться классической формулой нахождения вероятности .Так как вероятность события существует объективно, независимо от того, можно или нельзя применить в данном конкретном случае классическую формулу, то возникает вопрос, что считать вероятностью события и как ее вычислить.

На практике давно было замечено, что при многократном повторении опытов относительная частота появления события в этих опытах стремится к устойчивости. Другими словами, при малом количестве опытов относительная частота появления события подвержена резким колебаниям, а при увеличении их числа эти колебания уменьшаются , относительная частота выравнивается, приближаясь к некоторому постоянному числу.

Под **относительной частотой** появления события понимается отношение m/n, где n - число опытов, m - число появлений события.

Я.Бернулли доказал, что при неограниченном увеличении числа опытов относительная частота появления события будет практически сколь угодно мало отличаться от некоторого постоянного числа, которое и принимается за вероятность события в отдельном опыте. При этом должны выполняться некоторые условия, обеспечение которых обычно не представляет трудности. Поэтому естественно относительную частоту появления события при достаточно большом числе испытаний называть **статистической вероятностью** в отличие от ранее введенной «математической» вероятности.

Многие исследователи проверяли закон Я. Бернулли. Проводились многократные опыты, сводящиеся к схеме случаев, так как в этом случае можно вычислить вероятность, используя ее классическое определение. Так, например, Дж.Керрих провел опыты с бросанием монеты. Им было осуществлено 10 серий, каждая из которых содержала по 1000 бросков монеты. Оказалось, что «герб» выпадал 502, 497, 511, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 529 раз. Как видно, нив одной из серий относительная частота выпадания «герба» не равна 0,5, т.е. не совпадает с вероятностью выпадания «герба» при одном бросании монеты. Результаты этого и ряда других опытов приведены в таблице:

	Число испытаний	Частота появления 2герба»	Относительная частота (статистическая вероятность)
Опыт Керриха	10000	5027	0,5087
Опыт Бюффона	4040	2048	0,5069
Первый опыт Пирсона	12000	6019	0,5016
Второй опыт пирсона	24000	12012	0,5005

Нетрудно заметить при изучении данных таблицы стремление относительной частоты с возрастанием числа опытов к вероятности Р(Г) = 0,5 . Так, на практике можно установить, что относительная частота события (статистическая вероятность) стремится к вероятности события в отдельном испытании). Поэтому относительную частоту при достаточно большом числе опытов можно считать приближенным значением вероятности.

Теорема Бернулли

<u>*Теорема Бернулли*</u>*. Если вероятность события А в каждом из n независимых испытаний постоянна и равно p, то при достаточно большом n для произвольного* $\varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) > 1 - h,$$

где m – число появлений события A в n испытаниях, h *- число, близкое к нулю.*

Если в этой формуле перейти к пределу, то получим:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

Теорема Бернулли устанавливает связь между вероятностью появления события и его относительной частотой появления и позволяет при этом предсказать , какой примерно будет эта частота в n испытаниях.

Из теоремы видно, что отношение m/n обладает свойством устойчивости при неограниченном росте числа испытаний.

Справедливость последнего утверждения подтверждают опыты. С ростом числа n относительная частота m/n стремится к неслучайной величине Р(Г) = ½ (см. пункт «Статистическая вероятность»).

Иногда (при решении практических задач) требуется оценить вероятность того, что отклонение числа *m* появления события в *n* испытаниях от ожидаемого результата *np* не превысит определенного числа ε. В этом случае роль случайной величины играет число m.

Пусть $m = X_1 + X_2 + \ldots + Xn$. Тогда

$$M_m = M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M_{x_i} = np, \qquad D_m = D\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} = npq$$

Воспользовавшись неравенством Чебышева, имеем:

$$P\left(|m - np| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}$$

Центральная предельная теорема

Вспоминая доказанные выше теоремы, можно сделать вывод, что при выполнении довольно «нежестких» требований некоторые случайные величины с увеличением числа испытаний приближаются к определенным предельным значениям, не зависящим от вида распределения самих величин. Каждая из этих теорем является одной из форм закона больших чисел. В рассмотренных теоремах, а значит, и в законе больших чисел, ничего не говорится о виде распределения рассматриваемой случайной величины.

Другая группа теорем теории вероятностей, которые устанавливают связь между законом распределения суммы случайных величин и его предельной формой – нормальным законом распределения, называется *центральной предельной теоремой*. Различные формы центральной предельной теоремы отличаются между собой условиями, накладываемыми на сумму рассматриваемых случайных величин. Поскольку несложные условия на практике выполняются очень часто, нормальный закон является самым распространенным среди законов распределения, наиболее часто используемым при объяснении случайных явлений природы.

<u>Теорема Ляпунова</u>. Распределение суммы независимых случайных величин Xi, i = 1, 2, ... n, приближается к нормальному закону распределения при неограниченном увеличении n, если выполняются следующие условия:

1) *все величины имеют конечные математические ожидания и дисперсии;*
2) *ни одна из величин по своему значению резко не отличается от всех остальных, т.е. оказывает ничтожное влияние на их сумму.*

Теорема Ляпунова имеет большое практическое применение. На опыте было установлено, что распределение суммы независимых случайных величин, у которых дисперсии не отличаются резко друг от друга, довольно быстро приближается к нормальному. Уже при числе слагаемых, большем 10, распределение суммы можно заменить нормальным.

В заключение отметим, что теорема Ляпунова справедлива не только для непрерывных, но и для дискретных случайных величин. Рассмотренные ранее локальная и интегральная теоремы являются частным случаем центральной предельной теоремы.

При решении многих практических задач, связанных со случайной величиной $\overline{X}$, являющейся средним арифметическим наблюдаемых значений случайной величины X, применяется теорема Ляпунова в следующей формулировке:

<u>Теорема Ляпунова</u>. Если случайная величина X имеет конечные математическое ожидание Mx и дисперсию Dx, то распределение среднего арифметического $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$, *вычисленного по наблюдавшимся значениям случайной величины в n независимых испытаниях, проведенных в одинаковых условиях, при* $n \to \infty$ *приближается к нормальному с математическим ожиданием Mx и дисперсией Dx/n, т.е.*

$$P(\overline{X} > x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x/n}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-M_x)^2}{2D_x/n}} dt$$

133. В предположении , что один шаг пешехода распределен равномерно в пределах от 70 см до 80 см, и размеры шагов независимы, оценить вероятность того, что за 10 000 шагов пройденный пешеходом путь составит 7,5 км ± 50 м.

***Решени**е*. Пусть X_k - величина k – го по счету шага пешехода., k = 1, 2, … 10 000.. Тогда путь S, который пешеход пройдет за 10 000 шагов, выразится как $S = S_{10\,000} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10000}$. Принимая во внимание , что величина X_k распределена равномерно в интервале (70; 80), то математическое ожидание $M_{Xk} = 75$, $D_{Xk} = 25/3$, получаем согласно центральной предельной теореме:

$$P(745\,000 \le S \le 755\,000) \approx \Phi\left(\frac{755000-750000}{100*\sqrt{25/3}}\right) - \Phi\left(\frac{745000-750000}{100*\sqrt{25/3}}\right) \approx 2*\Phi(17{,}3) \approx 1.$$

Таким образом, событие, состоящее в том, что пройденный путь за 10 000 шагов составит 7,5 км ± 50 м , можно рассматривать как *практически достоверное*.

134. При составлении статистического отчета надо сложить 10 000 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-3}. считая, что ошибки округления независимы и распределены равномерно в интервале ($-0{,}5*10^{-3}$; $0{,}5 * 10^{-3}$), оцените наименьший по длине промежуток, в котором с вероятностью 0,95 будет заключена суммарная ошибка.

План-конспект занятия №26

<u>Тема занятия: Проверка гипотезы о законе распределения экспериментальных данных</u>

Тип занятия: *лабораторное занятие.*

Цель занятия: Решение вероятностных задач с использованием предельных теорем

Задачи:

Учебные: 1) закрепить ЗУН решения задач на нахождение характеристик НСВ в различных вариантах

2) контроль усвоения материала студентами.

Развивающие:

1. развитие логического мышления;
2. развитие памяти

Воспитательные:

1) воспитание самостоятельности и ответственности при решении поставленных задач.

Ход занятия:

1. Оргмомент (взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

1-3 мин

2. Проверочная работа (варианты ***№1 - 5***)

75-80 мин

3. Подведение итогов занятия и выставление оценок за работу на уроке.

3-5 мин

4. Домашнее задание:

1-3 мин

- Реферирование темы «Необычные области применения математической статистики»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Тема работы: Предварительная статистическая обработка экспериментальных данных.

Цель работы: Научиться проверять основные статистические гипотезы: об однородности наблюдений и соответствии результатов измерения закону нормального распределения вероятностей.

Задание: Основываясь на статистических критериях проверить, не содержат ли результаты измерений x_1, x_2, …, x_n грубых погрешностей. Используя приближенный критерий и критерий согласия Пирсона проверить гипотезу о том, что распределение вероятностей рассматриваемой серии измерений подчиняется нормальному закону.

Теоретическая часть

Предварительная обработка результатов измерений преследует в основном две цели: исключение грубых ошибок измерений и проверку гипотезы о соответствии результатов измерений закону нормального распределения.

1. Исключение грубых ошибок измерений.

Трудность обнаружения грубых ошибок обусловлена следующим обстоятельством. Если число измерений n мало, то доверительный интервал широк, и даже значительные отклонения от среднего $\bar{x}$ в него укладываются. Если же n велико, то возрастает вероятность того, что хотя бы одно измерение x_i сильно отклонится от среднего на «законных основаниях», т. е. случайно.

Методы исключения грубых погрешностей измерений для малых выборок изложены в материалах лекционного курса. Для больших выборок на практике используется следующий метод проверки однородности наблюдений.

Пусть произведено n независимых измерений и вычислены значения эмпирического среднего $\bar{x}$ и стандарта s. Сомнительный элемент выборки, резко отличающийся от других, будем обозначать через x_*. Это «крайний» элемент выборки, т. е. $x_* = x_{max}$ или $x_* = x_{min}$.

В основе рассматриваемого метода лежит тот факт, что критические значения максимального относительного отклонения

$$\tau = \frac{|x_* - \bar{x}|}{s} \tag{1}$$

выражаются через квантили распределения Стьюдента с $n-2$ степенями свободы:

$$\tau_{1-\alpha,n} = \frac{t_{1-\alpha,n-2}\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-2+t_{1-\alpha,n-2}^2}}. \tag{2}$$

На практике обычно вычисляются два значения $\tau_{1-\alpha,n}$ при $\alpha = 0.05$ и $\alpha = 0.001$:

$$\tau_1 = \tau_{1-0.05,n}, \qquad \tau_2 = \tau_{1-0.001,n}$$

Этими значениями вся область изменения τ разбивается на три интервала: 1) $\tau \le \tau_1$; 2) $\tau_1 < \tau < \tau_2$; 3) $\tau_2 \le \tau$. Наблюдения, попавшие в первый интервал, не рекомендуется отбрасывать ни в коем случае. Наблюдения, попавшие во второй интервал можно исключить, если имеются какие-либо дополнительные соображения в пользу их ошибочности. Наконец, наблюдения, попавшие в третий интервал, всегда отбрасываются как грубо ошибочные.

2. Проверка гипотезы о нормальности распределения результатов измерения.

Приближенный метод проверки нормальности распределения основан на вычислении по результатам измерения эмпирических оценок коэффициентов асимметрии, эксцесса и их дисперсий:

$$\widehat{A}=\frac{\widehat{\mu}_3}{s^3}\approx\frac{1}{s^3(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3, \qquad \widehat{E}=\frac{\widehat{\mu}_4}{s^4}\approx\frac{1}{s^4(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4-3,$$

$$D(\widehat{A})=\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}, \qquad D(\widehat{E})=\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}.$$

Если выборочные асимметрия и эксцесс удовлетворяют неравенствам

$$\left|\widehat{A}\right|\le 3\sqrt{D(\widehat{A})}, \qquad \left|\widehat{E}\right|\le 5\sqrt{D(\widehat{E})}, \tag{3}$$

то гипотеза о нормальности наблюдаемого распределения принимается, в противном случае гипотеза отклоняется.

Если выборка достаточно велика, применяются иные критерии согласия, наиболее надежным и универсальным из которых является критерий Пирсона χ^2. Применяя данный критерий необходимо выполнить следующие действия.

Область возможных значений случайной величины $(-\infty,+\infty)$ разбивается на конечное число ($m\approx 8\div 20$) непересекающихся интервалов:

$$(-\infty,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4),\ldots,(x_m,+\infty)$$

Для каждого интервала (x_{i-1},x_i) подсчитывается число n_i элементов выборки, попавших в данный интервал.

Вычисляется теоретическая вероятность p_i попадания в i-й интервал при нормальном законе распределения вероятностей

$$p_i\equiv P(x_{i-1}<X<x_i)=\Phi\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right)-\Phi\left(\frac{x_{i-1}-\bar{x}}{s}\right),$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа.

Проверяется выполнение условия $np_i\ge 5$ для всех интервалов; интервалы, для которых это условие не выполнено, объединяются с соседними интервалами.

Вычисляется сумма

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}, \tag{4}$$

имеющая приближенно χ^2- распределение с $k-3$ степенями свободы.

При заданной доверительной вероятности $p=1-\alpha$ (α - уровень значимости) и числе степеней свободы $k-3$ вычисляется (или находится по таблицам) *критическое значение* критерия $\chi^2_{p,k-3}$.

Если

$$\chi^2<\chi^2_{p,k-3}, \tag{5}$$

то гипотеза принимается, т. е. можно считать, что распределение вероятностей рассматриваемой серии измерений не отличается от нормального.

Необходимо помнить о вероятностном характере выводов, поэтому никакая, даже самая малая величина суммы (4) не может служить *доказательством* нормальности закона распределения.

Порядок выполнения задания

Исключение грубых ошибок измерений

1. Присвойте переменной ORIGIN значение равное единице.
2. Введите вектор выборочных значений (X:=READPRN("путь к файлу Lab3 1a")); используя встроенную функцию length(X) вычислите объем выборки.
3. Вычислите выборочные значения среднего, дисперсии и стандартного отклонения: $\bar{x}$, s^2 и s.
4. Изобразите элементы выборки и «трехсигмовый» интервал на графике. Определите грубо-визуально, есть ли среди элементов выборки резко отклоняющиеся значения.

5. Если есть подозрительные элементы, то для удобства дальнейших вычислений, произведите сортировку выборочных значений. Тогда подозрительные элементы будут находится в начале и (или) в конце вариационного ряда.

6. По формулам (1) и (2) вычислите значения τ, τ_1 и τ_2. Если значение τ попадает в третий интервал, исключите его из выборки; по оставшимся элементам выборки заново вычислите параметры $\overline{x}$, s^2, s и переходите к анализу следующего подозрительного элемента и т. д.

7. Сохраните рабочий документ в файле на диске.

Проверка гипотезы о нормальности распределения (1)

1. Присвойте переменной ORIGIN значение равное единице.

2. Введите вектор выборочных значений (Y:=READPRN(“путь к файлу Lab3 1b”)); используя встроенную функцию length(Y) вычислите объем выборки.

3. Вычислите оценки эмпирических коэффициентов асимметрии, эксцесса и их дисперсий.

4. Сравните вычисленные значения по формуле (3) и сделайте соответствующее заключение.

Проверка гипотезы о нормальности распределения (2)

1. Вычислите оценки эмпирического среднего, дисперсии и стандартного отклонения.

2. Вычислите максимальное и минимальное значения выборки.

3. Присвойте конкретное значение числу интервалов разбиения m и вычислите границы интервалов x_i $i = 1, 2, \ldots, m+1$; крайним границам присвойте значения $x_1 = -\infty$, $x_{m+1} = \infty$.

4. С помощью функции hist(x,X) вычислите частоты попадания выборочных значений в интервалы разбиения, а с помощью функции нормального распределения norm(x,a,s) – теоретические вероятности.

5. Проверьте выполнение условия $np_i \geq 5$ и объедините интервалы так, чтобы это условие было выполнено для всех интервалов.

6. Вычислите сумму (4).

7. Задайте определенный уровень значимости и вычислите критическое значение критерия $\chi^2_{p,m-3}$ - квантиль распределения «хи-квадрат» уровня p с $m-3$ степенями свободы.

8. На основе неравенства (5) сделайте вывод о принятии или отклонении гипотезы о нормальности распределения.

9. Сохраните рабочий документ в файле на диске.

Пример выполнения лабораторно-практической работы №3 с использованием системы Matcad:

ORIGIN := 1

Из файла с именем "Lab3 1a.txt " считываем заданную эмпирическую выборку и размещаем данные в массиве (векторе) X :

X := READPRN("E:\Users\VALERA\MSF TPU\Лаб работы\Задания\Lab3 1a.txt")

Параметры нормально распределенной выборки:

$n := 60 \qquad \mu := 15 \qquad \sigma := 1 \qquad \sigma^2 = 1$

Исключение грубых погрешностей

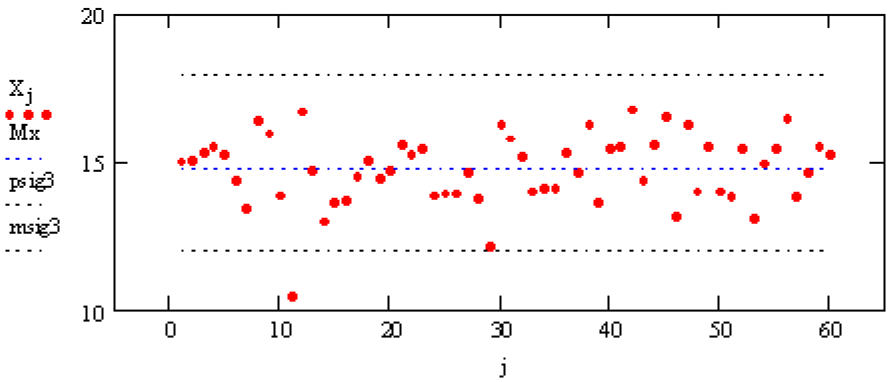
Выборочное среднее, дисперсия и стандартное отклонение :

$$Mx := \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} X_j \qquad s2 := \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - Mx\right)^2 \qquad s := \sqrt{s2}$$

$Mx = 14.717 \qquad s2 = 1.381 \qquad s = 1.175$

Графическое изображение элементов выборки, среднего и "трехсигмовах" пределов

$j := 1..n \qquad msig3 := \mu - 3\cdot\sigma \qquad psig3 := \mu + 3\cdot\sigma$

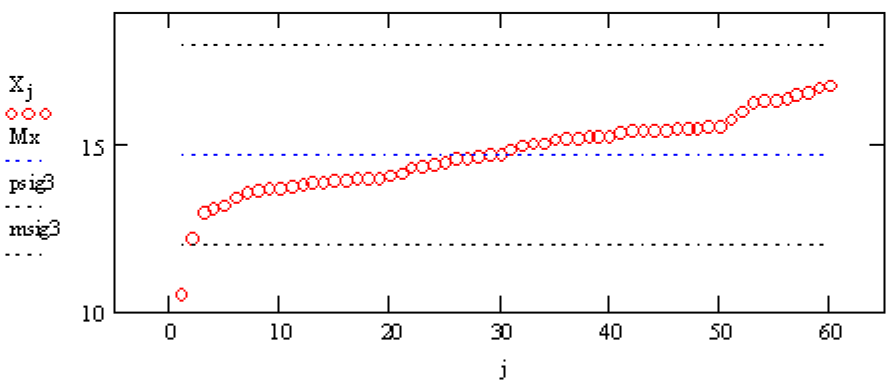


Сортировка выборки и повторное графическое изображение

$X := sort(X) \qquad xmax := max(X) \qquad xmin := min(X) \qquad |xmax - Mx| = 2.043$

$xmax = 16.76 \qquad xmin = 10.5 \qquad |xmin - Mx| = 4.217$

$j := 1..n$



Просматриваем вычисленные значения :

$pn := p \cdot N$

$y =$

	1
1	$-1 \cdot 10^{307}$
2	8.4
3	8.8
4	9.2
5	9.6
6	10
7	10.4
8	10.8
9	11.2
10	11.6
11	12
12	12.4
13	12.8
14	13.2
15	13.6
16	$1 \cdot 10^{307}$

$v =$

	1
1	0
2	3
3	7
4	12
5	16
6	24
7	22
8	39
9	19
10	16
11	13
12	7
13	1
14	1
15	0

$p =$

	1
1	$6.432 \cdot 10^{-3}$
2	0.013
3	0.03
4	0.058
5	0.097
6	0.136
7	0.161
8	0.161
9	0.135
10	0.096
11	0.058
12	0.029
13	0.012
14	$4.475 \cdot 10^{-3}$
15	$1.797 \cdot 10^{-3}$

$pn =$

	1
1	1.158
2	2.285
3	5.337
4	10.518
5	17.485
6	24.523
7	29.015
8	28.962
9	24.389
10	17.326
11	10.384
12	5.25
13	2.239
14	0.806
15	0.323

Объединяем три первых (1-3) и четыре последних (12-15) интервала, так чтобы выполнялись неравенства pN > 5 для всех интервалов разбиения; yy_k - границы новых интервалов

$yy_1 := y_1 \quad k := 2..10 \quad yy_k := y_{k+2} \quad yy_{11} := y_{m+1}$

$m := 10 \quad k := 1..m \quad vv := \mathrm{hist}(yy, Y) \quad pp_k := \mathrm{pnorm}(yy_{k+1}, My, s) - \mathrm{pnorm}(yy_k, My, s)$

$\sum_{i=1}^{m} pp_i = 1 \qquad \sum_{i=1}^{m} vv_i = 180$

$pn := pp \cdot N$

$yy =$

	1
1	$-1 \cdot 10^{307}$
2	9.2
3	9.6
4	10
5	10.4
6	10.8
7	11.2
8	11.6
9	12
10	12.4
11	$1 \cdot 10^{307}$

$vv =$

	1
1	10
2	12
3	16
4	24
5	22
6	39
7	19
8	16
9	13
10	9

$pp =$

	1
1	0.049
2	0.058
3	0.097
4	0.136
5	0.161
6	0.161
7	0.135
8	0.096
9	0.058
10	0.048

$pn =$

	1
1	8.779
2	10.518
3	17.485
4	24.523
5	29.015
6	28.962
7	24.389
8	17.326
9	10.384
10	8.618

Вычисляем сумму:

$$\chi 2 := \sum_{i=1}^{m} \frac{(vv_i - pn_i)^2}{pn_i} \qquad \chi 2 = 7.659$$

Критическое значение критерия "хи-квадрат" CR :

$\alpha := 0.05$ α - уровень значимости

$CR := \mathrm{qchisq}(1 - \alpha, m - 3) \qquad CR = 14.067$

CR - квантиль распределения "хи-квадрат" с m-3 степенями свободы

Так как вычисленное по выборке значение $\chi 2$ меньше критического значения CR, то согласно критерию Пирсона гипотеза о нормальности распределения принимается

План-конспект занятия №27

Тема: Предмет и метод математической статистики Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.

Вид занятия*: теоретическое занятие*

Цель занятия: познакомить с основными понятиями математической статистики.

Задачи:

Учебные: 1) разъяснить основные понятия, связанные с математической статистикой

2) дать понятия генеральной совокупности и выборки, их практические значения

Развивающие:

1) развитие логического мышления;

2) развитие памяти

3) развитие способности анализировать и обобщать, делать эмпирические выводы

Воспитательные:

1) воспитание аккуратности и внимательности

2) воспитание вдумчивости при принятии решений

Ход занятия:

1.Организационный момент — 1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Объяснение нового материала (см. лекцию) — 55-60 мин

3. Закрепление материала — 20-25 мин

(решение задач №№ **135 - 137**)

4.Подведение итогов занятия. — 1-3 мин

5. Домашнее задание: — 1-3мин

а) выучить конспект[3], стр 181-186.

б) дорешать задачи №№ **137**

Генеральная совокупность и выборка

Напомним, что предметом математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий) по результатам наблюдений. Для получения опытных данных необходимо провести обследование соответствующих объектов.

Например, если исследователя интересует вероятность того, что диаметр валика определенного типоразмера после шлифовки окажется за пределами технического допуска, то надо знать закон распределения этого диаметра, а для этого прежде всего надо располагать набором возможных значений диаметра. Однако обследовать все валики зачастую трудно, поскольку их количество может быть велико.

Поэтому приходится из всей совокупности объектов для обследования отбирать только часть, т. е. проводить выборочное обследование. В некоторых случаях обследование объектов всей совокупности практически не имеет смысла, поскольку они разрушаются в результате обследования.

*Пример **1**. Пусть на некотором комбинате выпускаются рыбные консервы. Для проверки на качество каждую банку приходится вскрывать, тем самым портить продукт. Как же в этом случае проверить качество консервного производства, если сплошное обследование всех банок невозможно?*

Допустим, что комбинату к определенному сроку требуется отправить в торговую сеть определенное количество качественной продукции. Чтобы иметь представление о качестве всей отправляемой партии консервов, берут небольшую часть продукции и проверяют на качество. По полученным результатам можно судить о качестве всей продукции, не приводя в негодность всю партию консервов. •

*Пример **2** При проверке качества производства электролампочек последние должны находиться под напряжением довольно большое время, что, естественно, невозможно в условиях массового производства. Поэтому для проверки на стандартность подвергают контролю только небольшую часть изготовленных лампочек. Практика подтверждает, что выводы о всей* *совокупности объектов, сделанные на основании анализа данных наблюдения только над заведомо меньшей частью этой совокупности, бывают достаточно надежными.* •

Зачастую реально существующую совокупность объектов можно мысленно дополнить любым количеством таких же однородных объектов.

Например, совокупность электромоторов определенной марки, изготовленных на данном заводе в течение квартала, можно дополнить гипотетической совокупностью таких же электромоторов, которые могут быть изготовлены во II, в III и т. д. кварталах.

В соответствии с этим наблюдения над объектами такой совокупности, в результате которых «снимаются» конкретные значения случайной величины (значения изучаемого признака объекта), можно мысленно продолжать в неизменных условиях как угодно долго.

Такие совокупности объектов или совокупности значений определенной случайной величины, соответствующие каждому из этих объектов, будем называть **генеральными**.

***Определение.* Совокупность всех мысленно возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения •с целью получения конкретных значений определенной случайной величины, или совокупность результатов всех мыслимых наблюдений, проводимых в неизменных условиях над одной из случайных величин, связанных с данным видом объектов, называется *генеральной совокупностью*.**

Как видно из определения, генеральная совокупность объектов данного вида и соответствующая совокупность значений случайной величины не различаются. Так как понятия генеральной совокупности и случайной величины связаны с наблюдениями (испытаниями) в неизменных условиях, то для простоты в дальнейшем эти понятия не будем различать. На самом деле понятие генеральной совокупности несколько шире понятия случайной величины, так как любое значение случайной величины может быть результатом нескольких наблюдений.

Генеральную совокупность будем называть **конечной** или **бесконечной** в зависимости от того, конечна или бесконечна совокупность составляющих ее элементов. Если множество значений случайной величины X бесконечно, то генеральная совокупность бесконечна. Если случайная величина дискретна и ее множество значений конечно, то генеральная совокупность может быть как конечной (например, по статистическим данным оценивается доля мальчиков среди детей, родившихся за год; здесь генеральная совокупность — это все родившиеся за год дети), так и бесконечной (если рассматривать до бесконечности непрерывное воспроизводство населения).

В заключение; отметим, что не следует смешивать понятие генеральной совокупности с реально существующими совокупностями.

Например, на склад поступила продукция некоторого цеха за месяц, что является реально существующей совокупностью, которую нельзя назвать генеральной, поскольку выпуск этой продукции можно мысленно продолжить сколь угодно долго.

***Определение.* Часть отобранных объектов из генеральной совокупности (результаты наблюдений над ограниченным числом объектов из этой совокупности) называется *выборочной совокупностью или выборкой*.**

Число N объектов генеральной совокупности и число *n* объектов выборочной совокупности будем называть **объемами** генеральной и выборочной совокупностей соответственно. При этом будем предполагать, что N>>n (N значительно больше n). Как уже отмечалось выше, о свойствах генеральной совокупности (случайной величины X) можно судить по данным наблюдений над отобранными объектами, т. е. по выборке. Однако не всякая выборка может дать действительное представление о генеральной совокупности.

*Пример **3.** В цехе по производству специальных втулок на токарных станках работают квалифицированные токари и только начинающие. Для проверки качества продукции на контроль взята партия втулок. Если эти втулки изготовлены квалифицированным токарем, то, очевидно, представление о качестве всей продукции цеха будет «завышенным», а если втулки изготовлены начинающим токарем, то это представление будет «заниженным».*

Для того чтобы по выборке можно было достаточно уверенно судить о случайной величине, выборка должна быть **представительной (репрезентативной)**. Репрезентативность выборки означает, что объекты выборки достаточно хорошо представляют генеральную совокупность. Заметим, что при отборе объектов могут сыграть роль личные мотивы или психологические факторы, о которых исследователь, проводящий выборку, и не подозревает. При этом, как правило, выборка не будет репрезентативной.

Репрезентативность выборки обеспечивается случайностью отбора. Последнее означает, что любой объект выборки отобран случайно, при этом все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку. Существует несколько способов отбора, обеспечивающих репрезентативность выборки. Рассмотрим некоторые из них.

☑ Пусть небольшие по размеру объекты генеральной совокупности находятся, например, в ящике. Каждый раз после тщательного перемешивания, если оно не является причиной деформации объектов, из ящика наудачу берут один объект. Эту операцию повторяют до тех пор, пока не образуется выборочная совокупность. Такой отбор невозможен, если генеральная совокупность состоит из достаточно больших по размерам объектов, например из мощных электромоторов, или из таких объектов, которые при перемешивании разрушаются, например из электролампочек. Тогда поступают следующим образом.

☑ Все объекты генеральной совокупности нумеруют, а затем каждый номер записывают на отдельную карточку. После этого карточки с номерами тщательно перемешивают и из полученной пачки карточек выбирают одну наудачу. Объект, номер которого совпал с номером на карточке, считается попавшим в выборку. Такую операцию повторяют до тех пор, пока не образуется необходимая выборка. При этом можно осуществить два различных варианта выборки.

1) Каждая вынутая карточка возвращается назад в пачку, и карточки снова тщательно перемешиваются. Повторяя эту операцию необходимое число раз, можно получить выборочную совокупность, которая называется ***случайной выборкой с возвратом***.

2) Каждая вынутая карточка не возвращается назад в пачку. Образованная таким способом выборка называется ***случайной выборкой без возврата***.

Так как при выборке с возвратом одну и ту же карточку можно выбрать дважды, а значит, соответствующий объект придется обследовать также дважды, то эту выборку называют также *случайной повторной*. Аналогично, выборку без возврата называют *случайной бесповторной*.

☑ При большом объеме генеральной совокупности применение карточек для организации случайной выборки затруднительно, что связано с необходимостью написания большого числа номеров, при этом хорошее перемешивание карточек трудно обеспечить. В таких случаях прибегают к помощи таблицы случайных чисел. В таблице** представлены эти числа. Предположим, например, что требуется сделать для контроля выборку из генеральной совокупности большого объема, представляющей собой изготовленные заводом в течение квартала электромоторы, каждый из которых имеет четырехзначный заводской, номер. Если выборка должна содержать 20 моторов, то из таблицы произвольным образом берут 20 четырехзначных чисел (можно подряд) и моторы с соответствующими номерами отправляют на контроль. В выборку могут попасть моторы с номерами 1534, 7106, 2836 и т. д. Если не обращать внимание на то, что некоторые номера могут повторяться и, следовательно, некоторые моторы должны обследоваться дважды, то выборка является, очевидно, выборкой с возвратом. Если же необходимо организовать случайную выборку без возврата, то при отборе случайных чисел из таблицы следует вновь встретившееся число пропустить.

Таблица случайных чисел (фрагмент)					
1534	7106	2836	7873	5574	7545
6128	8993	4102	2551	0330	2358
6047	8566	8644	9343	9297	6751
0806	5201	5705	7355	1448	9562
9915	8274	4525	5695	5752	9630
2882	7158	4341	3463	1178	5786
9213	1223	4388	9760	6691	6861
8410	9836	3899	3683	1253	1683
9974	2362	2103	4326	3825	9079
3402	8162	8226	0782	3364	7871

Пример ***4****. Пусть требуется организовать выборку без возврата из 100 объектов (они все пронумерованы), содержащую семь объектов. Для этого достаточно выбрать в таблице любой столбец, а в каждом числе этого столбца -две определенные цифры, которые будут означать двузначный номер объекта. Выберем, например, третий столбец и две последние цифры чисел этого столбца. Для определенности возьмем первые семь чисел этого столбца. Они дадут следующие семь номеров объекта: 36; 02; 44; 05; 25; 41; 88.*

☑ **Можно вместо этой таблицы использовать генератор случайных чисел (он предусмотрен в любом языке программирования!)**

Если объем генеральной совокупности велик, то различие между выборками с возвратом и без возврата, которые составляют ее небольшую часть, незначительно и практически не сказывается на окончательных результатах. В таких случаях, как правило, используют выборку без возврата. Если генеральная совокупность имеет не очень большой объем, то различие между указанными выборками будет существенным.

При любой выборке предполагается, что все объекты генеральной совокупности имеют в одном испытании одинаковую вероятность попасть в выборку. Убедимся на примере в том, что эта вероятность и для выборки с возвратом и для выборки без возврата не изменяется при переходе от одного испытания к другому.

Пример ***135.*** *В урне а белых и h черных шаров. Шары отличаются только цветом. Из урны наугад вынули два шара. Найдем вероятности двух событий: А1 -- первый шар белый, А2 —-второй шар также белый — для следующих двух случаев: выборка с возвратом и выборка без возврата.*

Очевидно, для выборки с возвратом $P(A_1) = P(A_2) = \dfrac{a}{a+b}$

Для выборки без возврата $P(A_1) = \dfrac{a}{a+b}$

Найдем $P(A_2)$. *Событие* A_2 *может наступить лишь при условии появления одного из двух следующих событий:* A_1 *— первый шар белый (гипотеза* H_1*), В,—первый шар черный (гипотеза* H_2*). Тогда по формуле полной вероятности получим*

$P(A_2) = P(H_1) * P(A_2/H_1) + P(H_2) * P(A_2/H_2) = P(A_1) * P(A_2/A_1) + P(B_1) * P(A_2/B_1) =$
$\dfrac{a}{a+b} * \dfrac{a-1}{a+b-1} + \dfrac{b}{a+b} * \dfrac{a}{a+b-1} = \dfrac{a}{a+b} = P(A_1)$

Таким образом, и для выборки с возвратом, и для выборки без возврата вероятность того, что объект попадет в выборку, не изменяется при переходе от одного испытания к другому, или, иными словами, с вероятностной точки зрения условия испытаний не изменяются. Однако если в выборке с возвратом испытания независимы, то в выборке без возврата испытания таким свойством не обладают: здесь испытания зависимы.

Это следует из *примера 5.* *При выборке с возвратом условная вероятность* $P(A_2/A_1)$ *вытащить второй шар белый при условии, что первый — белый, совпадает с безусловной вероятностью P(A2):* $P(A_2/A_1) = \dfrac{a}{a+b}$; $P(A_2) = \dfrac{a}{a+b}$

Для выборки без возврата $P(A_2/A_1) = \dfrac{a-1}{a+b-1}$; $P(A_2) = \dfrac{a}{a+b}$

таким образом, $P(A_2/A_1) \neq P(A_2)$.

Условие независимости является одним из основных используемых в теоремах теории вероятностей, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что имеет место случайная выборка с возвратом, и при этом иметь в виду, что выражение «случайная выборка с возвратом» тождественно выражению «испытания независимы и проведены в одинаковых условиях».

После того как сделана выборка, т. е. получена выборочная совокупность объектов, все объекты этой совокупности обследуют по отношению к определенной случайной величине (или случайному событию) и в результате этого получают наблюдаемые данные.

Следующая задача математической статистики заключается в обработке результатов наблюдений.

Полигон и гистограмма.

Как известно, закон распределения (или просто распределение) случайной величины можно задать различными способами. Например, дискретную случайную величину можно задать с помощью или ряда распределения, или интегральной функции, а непрерывную случайную величину — с помощью или интегральной, или дифференциальной функции. Рассмотрим выборочные аналоги этих двух функций.

В теории вероятностей для характеристики распределения случайной величины X служит интегральная функция распределения $F(x) = P(X<x)$. В дальнейшем, если величина X распределена по некоторому закону $F(x)$, будем говорить, что и генеральная совокупность распределена по закону F(x). Введем выборочный аналог функции $F(x)$.

Пусть имеется выборочная совокупность значений некоторой случайной величины X объема n и каждому варианту из этой совокупности поставлена в соответствие его частость. Пусть, далее, x—некоторое действительное число, а m_x — число выборочных значений случайной величины X, меньших x. Тогда число

m_x/n является частостью наблюдаемых в выборке значений величины X, меньших x, т. е. частостью появления события $X<x$. При изменении x в общем случае будет изменяться и величина m_x/n. Это означает, что относительная частота m_x/n является функцией аргумента x. А так как эта функция находится по выборочным данным, полученным в результате опытов, то ее называют выборочной или эмпирической.

Определение. ***Выборочной функцией распределения (или функцией распределения выборки) называется функция F(x), задающая для каждого значения x относительную частоту события X < x .***

Итак, по определению, $\hat{F}(x)$ = m_x/n, где n - объем выборки, m_x - число выборочных значений величины X, меньших x. В отличие от выборочной функции $\hat{F}(x)$ интегральную функцию $F(x)$ генеральной совокупности *называют теоретической функцией распределения*. Главное различие функций F(x) и $\hat{F}(x)$ состоит в том, что теоретическая функция распределения F(x) определяет вероятность события $X< x$, а выборочная функция — относительную частоту этого события.

Свойство статистической устойчивости частоты, обоснованное теоремой Бернулли, оправдывает целесообразность использования функции $\hat{F}(x)$ при больших n в качестве приближенного значения неизвестной функции $F(x)$.

В заключение отметим, что функция $F(x)$ и ее выборочный аналог $\hat{F}(x)$ обладают одинаковыми свойствами. Действительно, из определения функции F(x) имеем следующие свойства:

1°. $0< \hat{F}(x) <1$.

2°. $\hat{F}(x)$ ***- неубывающая функция.***

3°. $\hat{F}(-\infty)=0$; $\hat{F}(+\infty)=1$

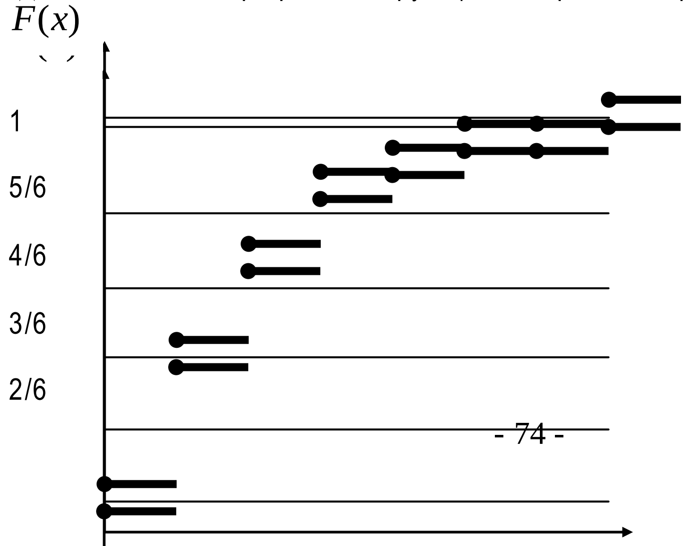
Такими же свойствами обладает и функция F(x).

138. Построить выборочную функцию распределения по данным задачи 136.

Решение. Объем выборки по условию равен 60, т. е. n = 60. Наименьший вариант равен 0, значит, $m_x = 0$ при $x\leq 0$. Тогда $m_x/n=0/60 = 0$, т. е. $\hat{F}(x)=0$ при $x \leq 0$. Если $0< x \leq 1$, то неравенство $X< x$ выполняется при условии, что X =0. Так как этот вариант встречается в выборке 8 раз, то m_x/n = =8/60=p_1, т.е. $\hat{F}(x)$ = 8/60. Если $1<x \leq 2$, то неравенство X<x выполняется при условии, что X=0 или X=1. Так как вариант $X_1=0$ встречается 8 раз, а вариант x_2 = 1 - 17 раз, то $m_x/n = (8+17)/60 = 25/60$, т.е. $\hat{F}(x) = p_1+p_2 = 25/60$ и т.д. В результате получаем искомую функцию распределения, значения которой представим в виде таблицы:

X	$\hat{F}(x)$
$x\leq 0$	0
$0< x\leq 1$	8/60
$1< x\leq 2$	25/60
$2< x\leq 3$	41/60
$3< x\leq 4$	51/60
$4< x\leq 5$	57/60
$5< x\leq 7$	59/60
$7< x$	60/60 = 1

График этой функции изображен на рисунке:



1/6

0

x

На этом графике видны все основные особенности выборочной функции распределения. Она не убывает, а ее значения находятся в интервале [0;1]. Резкие «скачки» графика функции $\widehat{F}(x)$, придающие ей ступенчатый вид, имеют место в тех точках, которым соответствуют наблюдаемые значения вариантов, при этом величина скачка равна частости варианта.

Функцию $\widehat{F}(x)$ наряду с табличным способом задания можно **задать аналитически**. В этом случае $\widehat{F}(x)$ определяется так:

$$\widehat{F}(x) = \begin{cases} 0, при\_x \le x_1 \\ \sum_{l=1}^{i-1} \widehat{p}_l \_при\_x_{i-1} < x \le x_i, \_i = 1,2,3\ldots,\nu, \\ 1, при\_x > x_\nu \end{cases}$$

Здесь x_ν совпадает с $x_{наиб}$. Частости $\sum_{l=1}^{i-1} \widehat{p}_l$ обычно называются *накопленными частостями*.

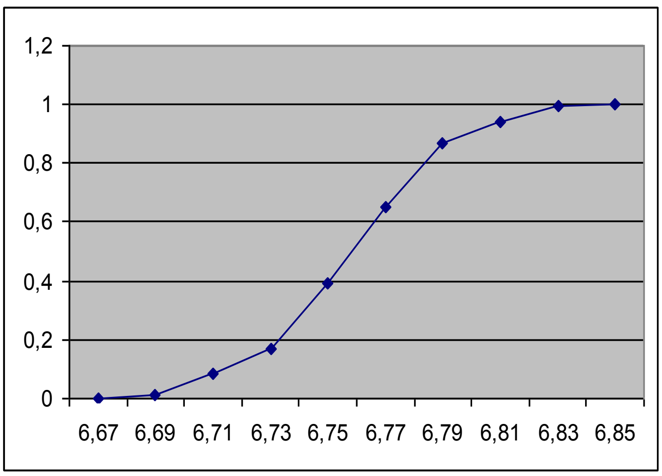
В рассматриваемом примере функция $\widehat{F}(x)$ построена по дискретному вариационному ряду и для дискретной случайной величины. Если результаты наблюдений представлены в виде интервального вариационного ряда, то выборочную функцию распределения построить в том виде, как это было сделано в примере 138, уже не представляется возможным. Рассмотрим на примере построение функции $\widehat{F}(x)$ по интервальному вариационному ряду для непрерывной случайной величины.

139. Используя данные задачи 137, построить выборочную функцию распределения.

Решение. Очевидно, что всех x $\in$]-∞; 6,67] функция распределения равна нулю. Пусть теперь x $\in$]6,67; 6,69]. В этом случае число m_x/n не определено, так как неизвестно, сколько выборочных значении случайной величины, принадлежащих этому интервалу, меньше *x*. Если x = 6,69, то m_x = 2. Следовательно, $\widehat{F}(6{,}69)$ = 2 / 200 = 0,01. Рассуждая аналогично, убеждаемся, что точками, в которых значение функции $\widehat{F}(x)$ можно определить, являются правые концы интервалов и все точки интервала [6,85; ∞[. Определяем теперь значение функции $\widehat{F}(x)$ в указанных точках и запишем в виде таблицы:

X	6,67	6,69	6,71	6,73	6,75	6,77	6,79	6,81	6,83	6,85
$\widehat{F}(x)$	0	0,010	0,085	0,170	0,390	0,650	0,870	0,940	0,995	1

Так как эта таблица определяет функцию $\widehat{F}(x)$ не полностью (не для всех *x* известны ее значения), то при графическом изображении данной функции целесообразно ее доопределить, соединив точки графика, соответствующие концам интервалов, отрезками прямой. В результате график функции $\widehat{F}(x)$ будет представлять собой непрерывную линию. Отметим, что подобный график выборочной функции $\widehat{F}(x)$, дающий приближенное представление о графике теоретической функции F(x), часто называют *кумулятивной кривой* (от англ, accumulation — накопление).



Как уже известно, для интегральной функции распределения F(x) справедливо приближенное равенство $F(x+\Delta x)-F(x)\approx f(x)\Delta x$, где f(x)—дифференциальная функция распределения или функция плотности вероятности. Из этого равенства следует, что $f(x)\approx (F(x+\Delta x)-F(x))/\Delta x$. Поэтому естественно выборочным аналогом функции f(x) считать функцию

$$\widehat{f}(x)\approx (\widehat{F}(x+\Delta x)-\widehat{F}(x))/\Delta x, \quad (*)$$

где $\widehat{F}(x+\Delta x)-\widehat{F}(x)$ - частость попадания наблюдаемых значений случайной величины *X* в интервал [x , x+Δx[. Таким образом, значение $\widehat{f}(x)$ характеризует плотность частости на этом интервале.

Пусть наблюдаемые над непрерывной случайной величиной данные представлены в виде интервального вариационного ряда. Полагая, что $\widehat{p}_i$ - частость попадания наблюдаемых значений случайной величины в интервал [a_i; a_i+h[, где h—длина частичного интервала, и учитывая равенство (*), для x$\in$ [a_i; a_i+h[запишем $\widehat{f}(x)$ = $\widehat{p}_i./h$. Тогда выборочную функцию плотности $\widehat{f}(x)$ можно задать соотношением

$$\widehat{f}(x)=\begin{cases} 0, при\_x<a_1 \\ \widehat{p}_i/h, при\_a_i\le x<a_{i+1}, i=1,2,3,..\nu \\ 0, при\_x\ge a_{\nu+1} \end{cases}$$

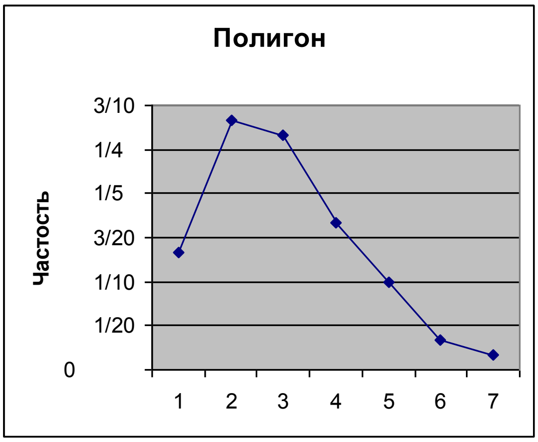
где $a_{\nu+1}$—конец последнего ν-го интервала. В таблице ниже приведены значения функции $\widehat{f}(x)$, построенной по наблюдаемым данным, взятым из примера 137.

i	Диаметр валика после шлифовки (интервалы), мм	Частость $\widehat{p}_i$	$\widehat{f}(x)$
1	6,67-6,69	0,010	0.50
2	6,69 -6,71	0,075	3.75
3	6,71 - 6,73	0,085	4.25
4	6,73 - 6,75	0,220	11.0
5	6,75 - 6,77	0,260	13.0
6	6,77 - 6,79	0,220	11.0
7	6,79 - 6,81	0,070	3.50
8	6,81 - 6,83	0,055	2.75
9	6,83 - 6,85	0,005	0.25

Наблюдаемые данные, представленные в виде вариационного ряда, можно изобразить графически, используя не только функцию $\widehat{F}(x)$. К наиболее распространенным видам графического изображения вариационных рядов относятся ***полигон и гистограмма***. Графическое изображение рядов с помощью полигона или гистограммы позволяет получить наглядное представление о закономерности варьирования наблюдаемых значений случайной величины.

Полигон обычно используют для изображения дискретного вариационного ряда. Для его построения в прямоугольной системе координат наносят точки с координатами *(x_i; m_i)* или *(xi; $\widehat{p}_i$)*, где x_i—значение *i*-го варианта, а m_i ($\widehat{p}_i$)—соответствующие частоты (частости). Затем отмеченные точки соединяют отрезками прямой линии. Полученная ломаная называется **полигоном.**

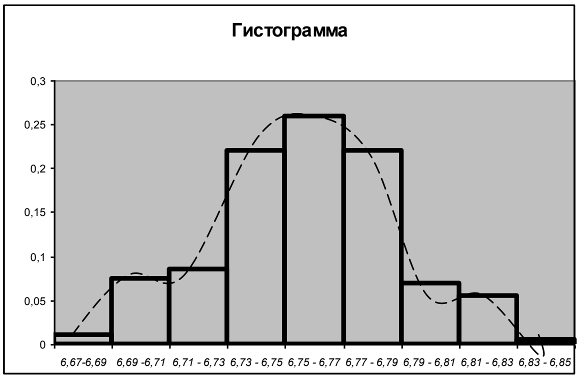
На рис. изображен полигон частостей, при построении которого использованы данные задачи 136.



Если полигон частостей построен по дискретному вариационному ряду дискретной случайной величины, то его называют *многоугольником распределения частостей*, который является выборочным аналогом многоугольника распределения вероятностей. Заметим, что сумма ординат многоугольника распределения частостей, как и у многоугольника распределения вероятностей, равна 1, так как $\sum \hat{p}_i = 1$.

Гистограмма служит только для изображения интервальных вариационных рядов. Для ее построения в прямоугольной системе координат на оси *Ox* откладывают отрезки, изображающие частичные интервалы варьирования, и на этих отрезках, как на основаниях, строят прямоугольники с высотами, равными частотам или частостям соответствующих интервалов. В результате такой операции получают ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, которую называют гистограммой.

На рисунке изображена гистограмма частостей, при построении которой были использованы данные задачи **137**.



Для графического изображения интервального вариационного ряда можно использовать полигон, если этот ряд преобразовать в дискретный. В этом случае интервалы заменяют их серединными значениями и ставят им в соответствие интервальные частоты (частости). Для полученного дискретного ряда строят полигон (см. рис., пунктирная линия).

План-конспект занятия №28

Тема: Изучение методов обработки экспериментальных статистических данных

Вид занятия*: лабораторное занятие*

Цель занятия: познакомить с основными приемами обработки экспериментальных статистических данных.

Задачи:

Учебные: 1) разъяснить основные понятия, связанные с математической статистикой

2) дать понятия генеральной совокупности и выборки, их практические значения

Развивающие:

1) развитие логического мышления;

2) развитие памяти

3) развитие способности анализировать и обобщать, делать эмпирические выводы

Воспитательные:

1) воспитание аккуратности и внимательности

2) воспитание вдумчивости при принятии решений

Методические указания к лабораторной работе №2

Проверка гипотез о нормальном законе распределения

Для оценки соответствия имеющихся экспериментальных данных **нормальному закону распределения** целесообразно совместное использование графических и статистических методов.

Графический метод позволяет выдвигать гипотезу о виде распределения, давать визуальную ориентировочную оценку расхождения или совпадений распределений.

При большом числе наблюдений ($n > 100$) неплохие результаты дает вычисление выборочных эксцесса и асимметрии. Принято говорить, что предположение о нормальности распределения не противоречит имеющимся данным, если асимметрия лежит в диапазоне от -0,2 до 0,2, а эксцесс – от -1 до 1.

Наиболее убедительные результаты дает использование критериев согласия. Здесь нулевая гипотеза H_0 представляет собой утверждение о том, что распределение генеральной совокупности, из которой получена выборка, не отличается от нормального. Среди критериев согласия большое распространение получил непараметрический критерий $\chi 2$ (хи-квадрат). Он основан на сравнении эмпирических частот интервалов группировки с теоретическими (ожидаемыми) частотами, рассчитанными по формулам нормального распределения. Для его применения желательно иметь не менее 40 выборочных данных, сгруппированных не менее чем в 7 интервалов, в каждом из которых находится хотя бы 5 наблюдений.

Следует отметить еще раз, что принятие основной гипотезы не означает еще ее верности. Более того, нередки случаи, когда экспериментальные данные хорошо аппроксимируются и нормальным и биномиальным или логнормальным законом. Сколько-нибудь уверенно о нормальности распределения можно судить, лишь если имеется большое (больше 100, лучше порядка 1000) данных.

В Excel критерий хи-квадрат реализован в функции **ХИ2ТЕСТ(*фактический_интервал;ожидаемый_интервал*)**, аргументами которой являются диапазон экспериментальных частот и диапазон теоретических частот для соответствующих интервалов. Функция ХИ2ТЕСТ вычисляет вероятность совпадения наблюдаемых (фактических) значений и теоретических (гипотетических) значений. Если вычисленная вероятность ниже уровня значимости (0,05), то нулевая гипотеза отвергается и утверждается, что наблюдаемые значения не соответствуют нормальному закону распределения. Если вычисленная вероятность близка к 1, то можно говорить о высокой степени соответствия экспериментальных данных нормальному закону распределения.

Теоретические частоты вычисляются при помощи функции

НОРМРАСП(*x;среднее;станд_откл;интегральная*). Здесь *среднее* – математическое ожидание теоретического распределения, в данном случае совпадает с выборочным средним; *станд_откл* – среднее квадратическое отклонение теоретического распределения, в данном случае берется оценка по выборочным данным; *интегральная* – логическое значение, следует поставить 1 чтобы получить интегральную функцию распределения. Для получения вероятности попадания гипотетического значения из нормально распределенной совокупности в интервал $[x_1;x_2]$, следует вычислить разность между значением функции при $x=x_1$ и $x=x_2$. Для получения теоретических частот надо умножить вероятности на объем выборки.

Пример 1. Проверить соответствие выборочных данных (выборка 1, выборка 3) эмпирического распределения (см. табл.1) нормальному закону распределения, используя пакет Excel.

Табл.1. Выборочные данные из различных генеральных совокупностей

№ п/п	Выборка1	Выборка3	№ п/п	Выборка1	Выборка3	№ п/п	Выборка1	Выборка3	№ п/п	Выборка1	Выборка3	№ п/п	Выборка1	Выборка3
1	2,40	3,60	17	3,68	3,20	33	5,30	3,60	49	4,01	3,58	65	5,55	4,58
2	2,31	3,75	18	4,92	0,95	34	3,00	3,24	50	1,49	2,57	66	4,59	4,09
3	6,99	3,30	19	4,47	1,26	35	3,94	4,22	51	3,55	2,86	67	4,34	3,45
4	6,24	4,46	20	5,00	3,86	36	3,46	2,54	52	3,67	2,27	68	3,22	2,54
5	5,36	2,84	21	2,68	2,79	37	3,23	4,29	53	3,40	4,05	69	2,82	3,96
6	4,06	1,42	22	4,74	4,42	38	3,32	3,54	54	4,38	5,04	70	4,90	2,51
7	5,51	3,52	23	3,08	2,88	39	4,41	1,34	55	4,39	3,12	71	5,08	3,22
8	3,63	2,10	24	3,01	2,75	40	2,79	3,66	56	4,53	1,38	72	3,80	2,68
9	4,14	3,41	25	3,34	1,37	41	4,32	3,36	57	4,34	4,38	73	4,62	4,10
10	3,96	3,30	26	4,26	2,88	42	2,91	3,01	58	2,65	2,61	74	4,67	4,21
11	3,30	1,44	27	3,16	1,86	43	4,90	3,11	59	5,12	3,65	75	3,45	2,85
12	5,32	4,38	28	3,35	1,67	44	5,03	4,30	60	4,70	2,71	76	4,91	1,30
13	1,08	1,15	29	4,21	1,60	45	2,70	2,43	61	2,83	3,19	77	3,22	1,96
14	4,35	4,97	30	4,14	2,87	46	3,34	1,82	62	4,26	3,78	78	4,31	4,62
15	2,96	2,07	31	2,04	2,90	47	5,31	2,48	63	3,48	3,19	79	5,16	4,05
16	3,57	3,71	32	3,69	3,42	48	3,57	3,84	64	3,72	2,74	80	3,34	3,09

Табл.2. Выборочные данные из различных генеральных совокупностей

№ п/п	Выборка2	Выборка4	№ п/п	Выборка2	Выборка4	№ п/п	Выборка2	Выборка4	№ п/п	Выборка2	Выборка4	№ п/п	Выборка2	Выборка4
1	4,34	3,73	17	2,11	1,12	33	3,16	2,69	49	4,25	3,75	65	6,20	2,66
2	4,82	4,16	18	4,14	2,75	34	4,80	3,60	50	3,62	2,78	66	5,30	3,51
3	5,13	2,50	19	4,63	2,68	35	5,22	2,78	51	4,35	1,47	67	3,09	3,00
4	3,34	4,01	20	4,69	3,86	36	4,69	3,74	52	3,71	1,02	68	2,41	1,72
5	4,64	5,88	21	4,29	2,74	37	3,00	0,98	53	3,12	3,78	69	4,28	1,31
6	2,56	3,20	22	3,95	0,17	38	2,08	2,36	54	3,94	3,31	70	3,27	2,01
7	4,00	1,73	23	3,04	3,95	39	5,00	2,30	55	4,76	3,48	71	3,55	1,64
8	5,42	4,26	24	3,92	2,03	40	2,64	3,48	56	5,44	0,43	72	4,34	2,18
9	3,46	2,72	25	4,02	1,31	41	5,00	1,81	57	4,84	2,61	73	3,34	2,85
10	5,24	4,71	26	3,90	2,44	42	2,98	4,30	58	4,63	0,17	74	3,59	2,17
11	3,33	3,58	27	5,30	2,37	43	4,09	1,81	59	3,56	3,36	75	4,28	2,19

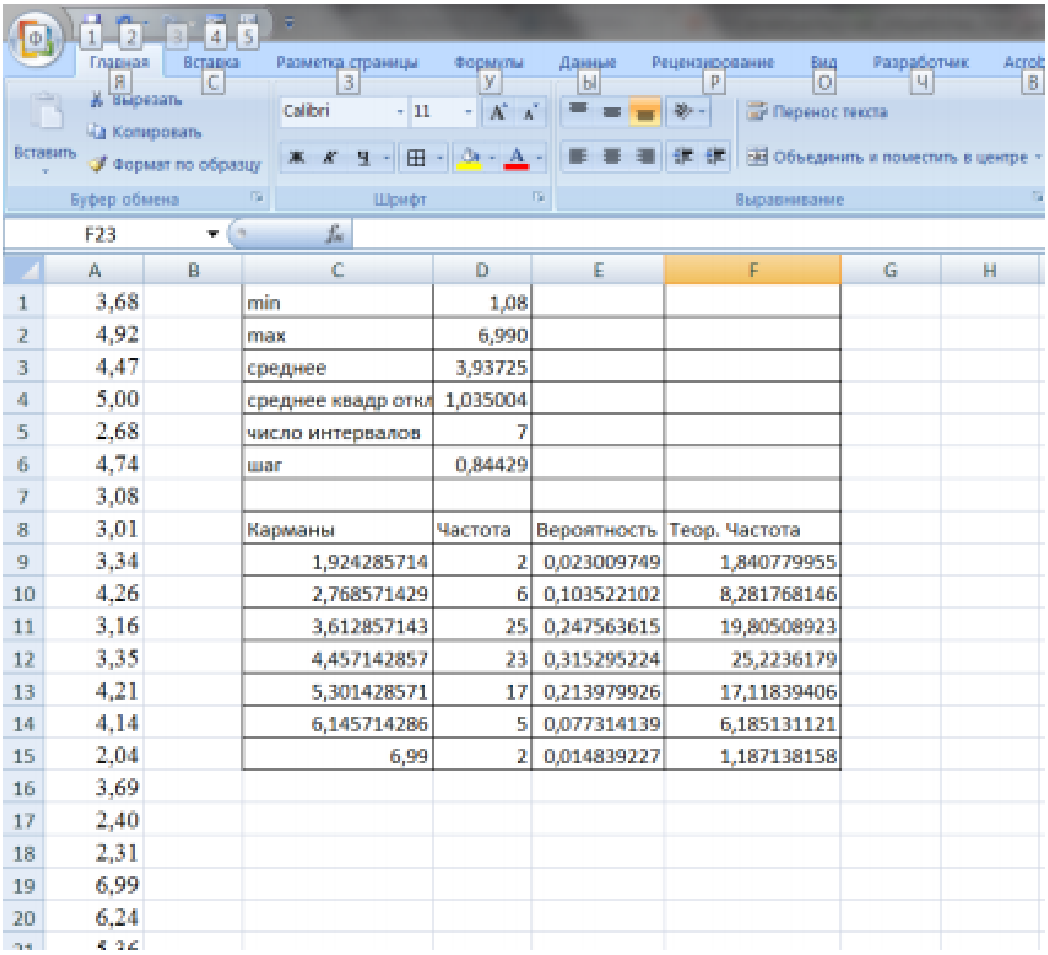
12	4,44	3,24	28	3,86	1,89	44	3,24	2,34	60	2,78	1,26	76	4,90	1,66
13	4,83	3,08	29	4,04	1,27	45	4,12	4,19	61	2,99	2,91	77	4,80	3,50
14	5,30	2,15	30	3,16	3,52	46	4,48	3,41	62	4,88	3,08	78	4,84	2,68
15	2,90	2,50	31	4,86	2,43	47	2,51	3,16	63	5,02	2,62	79	2,84	2,57
16	3,54	3,44	32	4,08	3,47	48	4,06	2,37	64	3,16	2,10	80	2,78	4,05

Решение

Откроем таблицы Excel и перенесем данные выборки1 в столбец А. Если Вы имеете дело с данными в формате Word, для этого достаточно выделить нужные столбцы, зажимая клавишу CTRL, скопировать в буфер, выделить на листе Excel одну ячейку (в нашем случае выделена ячейка А1) и выбрать опцию «Вставить». Данные займут диапазон А1:А80.

Построим интервальный статистический ряд. Значение, вычисленное по формуле Стерджесса, равно 7,322; выберем число интервалов k=7. Кроме того, вычислим выборочное среднее значение при помощи функции СРЗНАЧ и оценку генерального среднего квадратического (стандартного) отклонения.

. ***Обратите внимание, что при вычислении абсолютных частот интервалы начинаются со значения следующего за минимальным.***



	A	B	C	D	E	F
1	3,68		min	1,08		
2	4,92		max	6,990		
3	4,47		среднее	3,93725		
4	5,00		среднее квадр откл	1,035004		
5	2,68		число интервалов	7		
6	4,74		шаг	0,84429		
7	3,08					
8	3,01		Карманы	Частота	Вероятность	Теор. Частота
9	3,34		1,924285714	2	0,023009749	1,840779955
10	4,26		2,768571429	6	0,103522102	8,281768146
11	3,16		3,612857143	25	0,247563615	19,80508923
12	3,35		4,457142857	23	0,315295224	25,2236179
13	4,21		5,301428571	17	0,213979926	17,11839406
14	4,14		6,145714286	5	0,077314139	6,185131121
15	2,04		6,99	2	0,014839227	1,187138158
16	3,69					
17	2,40					
18	2,31					
19	6,99					
20	6,24					

Рис. 1.

Теперь вычислим вероятность попадания нормально распределенной величины в карманы построенного интервального ряда.

Для первого интервала вычислим разность значений функции нормального распределения в верхней границе интервала, указанной в ячейке C9, и в нижней, равной минимальному значению в выборке и указанному в ячейке D1. Таким образом, в ячейке E9 надо ввести формулу

=НОРМРАСП(C9;D3;D4;1)-НОРМРАСП(D1;D3;D4;1).

Аналогично, для следующего интервала в ячейке E10 введем формулу

=НОРМРАСП(C10;D3;D4;1)-НОРМРАСП(C9;D3;D4;1) и скопируем ее.

Чтобы получить теоретические частоты, умножим частости на объем выборки. В ячейке F9 введем

=E9*80

и «растянем» результат на диапазон F10:F15. Заметим что, поскольку теоретически нормально распределенный признак может принимать любые действительные значения, сумма теоретических частот для данных интервалов будет меньше объема выборки.

И наконец, вычислим значение функции ХИ2ТЕСТ применительно к массивам частот в ячейке D21: =ХИ2ТЕСТ(D9:D15;F9:F15).

Полученное значение 0,81 означает, что оснований отвергнуть гипотезу о нормальности распределения нет, поскольку значение больше уровня значимости 0,05. Более того, степень соответствия нормальному закону довольно велика.

Чтобы проверить теперь данные выборки2, полученной из той генеральнй совокупности (Табл.2), на соответствие нормальному закону распределения, достаточно заменить массив данных в диапазоне A1:A80 на данные из таблицы 2; все значения будут автоматически пересчитаны. Полученное значение ХИ2ТЕСТ равно 0,3121, то есть оснований отвергнуть гипотезу о нормальности нет, но степень соответствия ниже, чем в первом случае.

Аналогичным образом при помощи функции ХИ2ТЕСТ проверяют непротиворечивость экспериментальных данных другим законам распределения, например, закону Пуассона (в этом случае теоретические частости вычисляются при помощи функции ПУАССОН).

Задание 1. Проверить данные выборки3, выборки 4, полученной из той генеральнй совокупности (Табл.2), на соответствие нормальному закону распределения.

Задание 2. Проверить данные выборки из индивидуального задания №1на соответствие нормальному закону распределения.

Проверка гипотез о равенстве средних

Важнейшим вопросом, возникающим при анализе двух выборок, является вопрос о наличии различий между этими выборками. Обычно для этого проводят проверку статистических гипотез о принадлежности обеих выборок одной генеральной совокупности или о равенстве генеральных средних. Необходимость сравнения средних изучаемых свойств объектов возникает в широком спектре задач. Например, проверка гипотезы о равенстве средних содержаний полезного компонента, рассчитанных по рядовым и контрольным пробам (произведенным другим, более надежным, но обычно более дорогим и трудоемким способом), позволяет объективно решить вопрос о наличии или отсутствии систематических ошибок в результатах рядового опробования.

Для решения подобных задач используются параметрические и непараметрические критерии согласия.

Из параметрических критериев наибольшей популярностью при проверке гипотез о равенстве генеральных средних (математических ожиданий) пользуется t-критерий Стьюдента. Критерий позволяет найти вероятность того, что оба средних относятся к одной и той же совокупности. Если эта вероятность *p* ниже уровня значимости, то принято считать, что выборки относятся к двум разным совокупностям.

При использовании t-критерия можно выделить два случая. В первом случае его применяют для проверки гипотезы о равенстве генеральных средних двух независимых, несвязанных выборок (так называемый двухвыборочный t-критерий). Во втором случае, когда одна и та же группа объектов порождает числовой материал для проверки гипотез о средних (например, при использовании двух разных методов измерения), используется так называемый парный t-критерий. Выборки при этом называют зависимыми, связанными.

В обоих случаях должно выполняться требование нормальности распределения исследуемого признака в каждой из сравниваемых групп и равенства дисперсий в сравниваемых совокупностях. Однако на практике корректное применение t-критерия Стьюдента для двух групп часто бывает затруднительно, поскольку достоверно проверить эти условия удается далеко не всегда. Существует также вариант критерия Стьюдента для нормально распределенных совокупностей с разной дисперсией, его мощность несколько ниже.

Для оценки достоверности отличий по критерию Стьюдента принимается нулевая гипотеза, что средние выборок равны между собой. Затем вычисляется значение вероятности того, что изучаемые события (например, количества реализованных путевок в обеих выборках) произошли случайным образом.

В Excel для оценки достоверности отличий по критерию Стьюдента используются специальная функция ТТЕСТ(*массив1;массив2;хвосты;тип*). Здесь:

массив 1 – это первое множество данных;

массив 2 – это второе множество данных;

хвосты – число хвостов распределения. Обычно число хвостов равно 2, это значит, что функция ТТЕСТ использует двустороннее распределение. Если хвосты = 1, то функция ТТЕСТ использует одностороннее распределение.

тип – это вид исполняемого t-теста. Возможны 3 варианта выбора: 1 – парный тест, 2 – двухвыборочный тест с равными дисперсиями, 3 – двухвыборочный тест с неравными дисперсиями.

Также могут быть использованы процедуры пакета анализа: «Двухвыборочный t-тест» и «Парный двухвыборочный t-тест». Все перечисленные инструменты вычисляют вероятность, соответствующую критерию Стьюдента, и используются, чтобы определить, насколько вероятно, что две выборки взяты из генеральных совокупностей, которые имеют одно и то же среднее. Если вероятность случайного появления анализируемых выборок меньше уровня значимости, считают, что различия между выборками не случайные (т.е. достоверные).

Пример 2. Выявить, достоверны ли отличия при сравнении данных выборки 1 и выборки 2 в двух вариантах постановки задачи:

1) группы состоят из наблюдений за различными объектами

2) группы составлены по результатам обследования различными методами (таблицы 1 и 2.)

Решение

1) Откроем таблицу Excel. Перенесем данные Выборки1 из таблицы 1 в столбец А (диапазон А2:А81) и из таблицы 2 Выборки 2 в столбец В (В2:В81). Вычислим средние выборочные значения при помощи функции СРЗНАЧ; они равны соответственно 3,937 и 4,015. Проверим гипотезу о равенстве генеральных средних. В качестве альтернативной гипотезы примем составную гипотезу о неравенстве средних; тогда будет использоваться двустороннее распределение Стьюдента (*хвосты*=2). Поскольку сравниваются данные по разным выборкам, а сведений о равенстве дисперсий нет, выберем тип теста 3. Таким образом, для применения критерия Стьюдента в ячейке D1 введем формулу: =ТТЕСТ(А2:А81;В2:В81;2;3). Полученное значение 0,61 намного выше уровня значимости, поэтому нельзя считать различия достоверными.

2) Выполним аналогичные действия для данных из таблицы 1. и 2 (Выборки 1 и 4); разница в том, что обе выборки получены при обследовании различными методами. Можно использовать расчетный лист для второй задачи, значение «тип» в функции ТТЕСТ на 1. Полученное значение $1{,}2827 \cdot 10^{-10}$ меньше уровня значимости, значит различия достоверные. Если первое измерение выполнено хорошо известным, опробованным методом, а второе – новым, полученный результат означает что новый метод имеет систематическую ошибку и пользоваться им вместо старого нельзя.

Следует отметить, однако, что полной уверенности в корректности применения критерия Стьюдента у нас нет, так как степень соответствия нормальному закону распределения у второй выборки невелика, а третью мы вообще не проверяли; да и объем выборки в 80 значений не позволяет уверенно судить о принадлежности к нормально распределенной совокупности даже для первой выборки. Поэтому имеет смысл подтвердить результат анализа при помощи непараметрического критерия.

Задание 3. Сгенерируйте две нормально распределенные случайные величины с одинаковыми параметрами. Выявить, достоверны ли отличия при сравнении данных выборки 1 и выборки 2 в двух вариантах постановки задачи:

1) группы состоят из наблюдений за различными объектами

2) группы составлены по результатам обследования различными методами.

План-конспект занятия № 29

Тема: Точечные и интервальные оценки

Вид занятия*: теоретическое занятие*

Цель занятия: познакомить с основными понятиями математической статистики.

Задачи:

Учебные: 1) разъяснить основные понятия, связанные с математической статистикой

2) дать понятия генеральной совокупности и выборки, их практические значения

Развивающие:

1) развитие логического мышления;

2) развитие памяти

3) развитие способности анализировать и обобщать, делать эмпирические выводы

Воспитательные:

1) воспитание аккуратности и внимательности

2) воспитание вдумчивости при принятии решений

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Объяснение нового материала (см. лекцию)

55-60 мин

3. Закрепление материала

20-25 мин

(решение задач №№ **143**)

4.Подведение итогов занятия.

1-3 мин

5. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект[3], стр 194-197.

б) решить задачи №№ **144**

Вариационные ряды

Обычно полученные наблюдаемые данные представляют собой множество расположенных в беспорядке чисел. Просматривая это множество чисел, зачастую бывает трудно выявить какую-либо закономерность их варьирования (изменения). Для изучения закономерностей (если таковые вообще имеются) варьирования значений случайной величины опытные данные подвергают обработке.

*Пример **136**. На телефонной станции проводились наблюдения над числом X неправильных соединений в минуту. Наблюдения в течение часа дали следующие результаты: **3**; 1; 3; 1; 4; **2**; 2; 4; 0; 3; **0**; 2; 2; 0; 2; **1**; 4; 3; 3; 1; **4**; 2; 2; 1; 1; **2**; 1; 0; 3; 4; **1**; 3; 2; 7; 2; **0**; 0; 1; 3; 3; **1**; 2; 4; 2; 0; **2**; 3; 1; 2; 5; **1**; 1; 0; 1; 1; **2;** 2; 1; 1; 5. Здесь, очевидно, число X является дискретной случайной величиной, а полученные о ней сведения представляют собой статистические (наблюдаемые) данные. •*

Определение. Операция, заключающаяся в том, что результаты наблюдений над случайной величиной, т. е. наблюдаемые значения случайной величины, располагают в порядке неубывания, называется ранжированием опытных данных.

*После проведения операции ранжирования опытные данные нетрудно объединить в группы, т. е. сгруппировать так, что в каждой отдельной группе значения случайной величины будут одинаковы. Расположив приведенные выше данные в порядке неубывания и сгруппировав их, получаем следующий ранжированный ряд данных наблюдения: **0**; 0; 0; 0; 0; **0**; 0; 0; 1; 1; **1**; 1; 1; 1; 1; **1**; 1; 1; 1; 1; **1**; 1; 1; 1; 1; **2**; 2; 2; 2; 2; **2**; 2; 2; 2; 2; **2**; 2; 2; 2; 2; **2;** 3; 3; 3; 3; **3**; 3; 3; 3; 3; **3**; 4; 4; 4; 4; **4;** 4; 5; 5; 7. Из полученного ряда чисел видно, что все 60 значений случайной величины разбиты на семь групп, в пределах каждой из которых все значения случайной величины одинаковы. Таким образом, имеется семь различных значений случайной величины: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 7. Каждое такое значение обычно называют вариантом.*

Определение. Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных, называется вариантом, а изменение этого значения — варьированием.

Варианты будем обозначать малыми буквами конца латинского алфавита с соответствующими порядковому номеру группы индексами x_i, y_j, z_k, ...

В приведенном примере первая группа данных содержит 8 одинаковых значений случайной величины, равных 0, т.е. $x_1 = 0$, соответственно $x_2=1$, $x_3 = 2$; четвертая группа данных содержит 10 одинаковых значений случайной величины, равных 3, т. е. $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$, $x_7 = 7$. Просматривая ряд полученных данных, нетрудно убедиться, что значение случайной величины варьирует (изменяется) от 0 до 7, причем наиболее часто встречается вариант $x_2=1$.

Для каждой группы сгруппированного ряда данных можно подсчитать их численность, т. е. определить число, которое показывает, сколько раз встречается соответствующий вариант в ряде наблюдений. Такие числа называют *частотой* варианта.

<u>Определение.</u> Численность отдельной группы сгруппированного ряда наблюдаемых данных называется <u>частотой</u> или <u>весом</u> соответствующего варианта и обозначается m_i, где i—индекс варианта.

Например, для варианта x_1 частота $m_1= 8$; $m_2 = 17$; $m_3 = 16$; частота $m_4 = 10$; $m_5 = 6$; $m_6 = 2$; $m_7 = 1$.

В ряде случаев представляет практический интерес относительная частота того или иного варианта, называемая частостью.

<u>Определение</u>. Отношение частоты данного варианта к общей сумме частот всех вариантов называется <u>частостью</u> или <u>долей</u> этого варианта и обозначается p_i, где i— индекс варианта.

Так как в приведенном примере общая сумма всех частот равна 60, то нетрудно подсчитать, что $p_1 = 8/60 =2/15$, $p_2 = 17/60$; $p_3 = 16/60 = 4/15$; $p_4 = 10/60 =1/6$; $p_5 =6/60 = 0,1$; $p_6 = 2/60 = 1/30$; $p_7 = 1/60$.

Таким образом, частость выражает долю (удельный вес) данного варианта во всей совокупности наблюдаемых значений случайной величины.

По определению частости имеем $p_i = \dfrac{m_i}{\sum_{i=1}^{\nu} m_i}$ где ν — число вариантов. Предполагая, что

$n = \sum_{i=1}^{\nu} m_i$, где n — объем выборки, последнюю формулу перепишем в виде

$$p_i = \frac{m_i}{n}$$

Теперь нетрудно заметить, что частость p_i является статистической вероятностью появления варианта x_i,. Естественно считать частость p_i выборочным аналогом (вычисленной по выборочным данным) вероятности p_i появления значения x_i,случайной величины X, так как частость (статистическая вероятность) p_i обладает свойством устойчивости, или, иначе, при выполнении определенных условий стремится по вероятности к вероятности p_i.

Подсчитав частоты и частости для каждого варианта, представим наблюдаемые данные в виде таблицы, где в первой строке расположены индексы вариантов i, во второй — варианты x_i, в третьей—соответствующие частоты m_i,, в четвертой— соответствующие частости p_i..

Индекс	i	1	2	3	4	5	6	7
Число неправильных соединений в минуту	x_i	0	1	2	3	4	5	7
Частота	m_i	8	17	16	10	6	2	1
Частость	p_i	8/60	17/60	16/60	10/60	6/60	2/60	1/60

<u>Определение.</u> Дискретным вариационным рядом распределения называется ранжированная совокупность вариантов x_i с соответствующими им частотами m_i, или частостями p_i.

Как следует из определения, в таблице представлен дискретный вариационный ряд распределения 60 неправильных соединений по числу этих соединений в минуту.

Пусть для дискретной случайной величины X по выборочным данным построен дискретный вариационный ряд, в котором каждому варианту x_i ставится в соответствие его частость p_i.. Тогда, учитывая отмеченную выше ее связь с вероятностью, естественно считать данный ряд выборочным аналогом ряда распределения упомянутой случайной величины.

Если изучаемая случайная величина является непрерывной, то ранжирование и группировка наблюдаемых значений зачастую не позволяют выделить характерные черты варьирования ее значений. Это объясняется тем, что отдельные значения случайной величины могут как угодно мало отличаться друг от друга и поэтому в совокупности наблюдаемых данных одинаковые значения величины могут встречаться редко, а частоты вариантов мало отличаются друг от друга.

Нецелесообразно также построение дискретного ряда для дискретной случайной величины, число возможных значений которой велико. В подобных случаях следует построить интервальный (вариационный) ряд распределения. Для построения такого ряда весь интервал варьирования наблюдаемых значений случайной величины разбивают на ряд частичных интервалов и подсчитывают частоту попадания значений величины в каждый частичный интервал.

<u>Определение</u>. <u>Интервальным вариационным рядом</u> называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или частостями попаданий в каждый из них значений величины.

Построение интервального вариационного ряда рассмотрим на примере.

*<u>Пример **137**</u>. При измерении диаметра валиков после шлифовки получены следующие результаты:*

6,75	6,77;	6,77;	6,73;	6,76;	6,74;	6,70;	6,75;	6,71;	6,72;	6,77;	6,79;	6,71;	678;
673	6,70;	673-	6,77;	675-	6,74;	6,71-	6,70;	6,78;	6,76-	6,81;	6,69-	680-	680-
6,77;	**6,68;**	6,74;	6,70;	6,70;	6,74;	6,77;	**6,83**;	6,76;	6,76;	6,82;	6,77;	6,71;	6,74;
6,77;	6,75;	6,74;	6,75;	6,77;	6,72;	6,74;	6,80;	6,75;	6,80;	6,72;	6,78;	6,70;	6,75;
6,78	6,78;	6,76-	6,77;	6,74	6,74;	6,77-	6,73;	674-	6,77-	674-	6,75	674-	676-
6,76-	6,74;	6,74-	6,74;	6,74	6,76;	6,74-	6,77-	6,80;	6,76-	678-	6,73-	670-	676-
6,76;	6,77;	6,75;	6,78;	6,72;	6,76;	6,78;	6,68;	6,75;	6,73;	6,82;	6,73;	6,80;	681;
6,71;	6,82;	6,77;	6.80;	6,80;	6,70;	6,70;	6,82;	6,72;	6,69;	6,73;	6,76;	6,74;	6,77;
6 ,72	6,76;	6,78-	6,78;	6,73	6,76;	680-	6,76;	6,72;	6,76-	6,76;	6,70-	673-	675-
6 ,77	6,77;	6,70-	6,81;	6,74	6,73;	677-	6,74;	6,78;	6,69-	674-	6,71-	676-	676-
6,77;	6,70;	6,81-	6,74;	6,74	6,77;	67V	6,80;	6,74;	6,76-	6,77;	6,77-	681-	67*
678-	6,73	6,76-	6,76;	6,76	6,77;	676-	6,80;	677-	6,74-	677-	6,77-	675-	676-
677-	6,81;	6,76-	6,76;	6,76	6,80;	674-	680-	6,74;	6,73-	675-	6,77-	674-	676-
6,77;	6,77;	6,75;	6,76;	6,74;	6,82;	6,76;	6,73;	6,74;	6,75;	6,76;	6,72;	6,78;	6,72;
6,76	6,77-	6,75	6,78										

Для построения интервального ряда необходимо определить величину частичных интервалов, на которые разбивается весь интервал варьирования наблюдаемых значений случайной величины. Считая, что все частичные интервалы имеют одну и ту же длину, для каждого интервала следует установить его верхнюю и нижнюю границы, а затем в соответствии с полученной упорядоченной совокупностью частичных интервалов сгруппировать результаты наблюдений. Длину частичного интервала *h* следует выбрать так, чтобы построенный ряд не был громоздким и в то же время позволял выявить характерные черты изменения значений случайной величины, т. е. характерные черты изучаемого явления.

Просматривая приведенные выше результаты наблюдений, находим, что наибольшим значением случайной величины ($X_{наиб}$) является 6,83, а наименьшим ($X_{наим}$) — 6,68. Найдем размах варьирования R. Имеем $R = X_{Наиб} - X_{наим} = 6{,}83 - 6{,}68 = 0{,}15$.

Теперь следует выбрать число интервалов v. Для того чтобы вариационный ряд не был слишком громоздким, обычно число интервалов берут от 7 до 11.

Положим предварительно v = 7, тогда длина частичного интервала $h = R / v = 0{,}15/7 \approx 0{,}0214$. *Однако в данном случае более удобно взять h = 0,02.*

Для более точного определения величины частичного интервала можно воспользоваться **формулой Стерджеса**

$$h = (X_{Наиб} - X_{наим})/(1 + 3.322\, Lg\, n)$$

Если окажется, что h—дробное число, то за длину частичного интервала следует брать либо ближайшее целое число, либо ближайшую простую дробь.

Имеем $h = 0{,}15/(1 + 3{,}322 \lg 200) \approx 0{,}0174 \approx 0{,}02$.

За начало первого интервала рекомендуется брать величину

$$X_{нач} = X_{наим} - 0{,}5 * h.$$

В данном случае $Xнач = 6{,}68 - 0{,}5 * 0{,}02 = 6{,}67$.

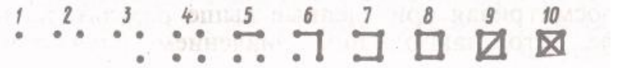
Конец последнего интервала ($X_{кон}$) должен удовлетворять условию

$$X_{кон} - h \leq X_{наиб} < X_{кон} \bullet$$

Промежуточные интервалы получают прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала h (в рассматриваемом случае h = 0,02).

Теперь, просматривая результаты наблюдений, определяем, сколько значений признака попало в каждый конкретный интервал. При этом в интервал включают значения случайной величины, большие или равные нижней границе и меньшие верхней границы. Это можно выполнить следующим образом. Границы полученной последовательности интервалов записывают в столбец, а затем, просматривая данные в том порядке, в котором они были получены, проставляют справа от соответствующего интервала точки или черточки.

Подсчет частот для каждого интервала удобно проводить *методом «конвертиков».* Суть этого метода состоит в том, что попадание значения случайной величины в тот или иной интервал отмечается точкой, а также и черточкой. В результате каждому десятку будет соответствовать фигура, похожая на конверт:



Шкала интервалов и группировка результатов наблюдений методом «конвертиков» для рассматриваемого случая приведены в табл. 3, которая задает искомый интервальный ряд распределения. В табл. 3 частота m_i показывает, в скольких наблюдениях случайная величина приняла значения, принадлежащие тому или иному интервалу, причем нижний конец интервала входит в него, а верхний — нет. Например, из таблицы видно, что в четвертый интервал попало 44 значения случайной величины. Однако определенно нельзя сказать, каковы эти значения, зато можно утверждать, что все эти значения принадлежат интервалу [6,73; 6,75 [. Такие частоты обычно называют *интервальными*, а их отношение к общему числу наблюдений — *интервальными ча-стостями*.

При вычислении интервальных частостей округление результатов следует проводить таким образом, чтобы общая сумма частостей была равна 1.

Иногда интервальный вариационный ряд для простоты исследований условно заменяют дискретным. В этом случае серединное значение i-го интервала принимают за вариант X_i, а соответствующую интервальную частоту m_i—за частоту этого интервала.

				Таблица 3
№ п/п	Диаметр валика после шлифовки (интервалы), мм	Рабочее поле	Частота mi,	Частость pi
1	6,67-6,69		2	0,010
2	6,69 -6,71		15	0,075
3	6,71 - 6,73		17	0,085
4	6,73 - 6,75		44	0,220
5	6,75 - 6,77		52	0,260
6	6,77 - 6,79		44	0,220
7	6,79 - 6,81		14	0,070
8	6,81 - 6,83		11	0,055
9	6,83 - 6,85		1	0,005
$\sum$			200	1

План-конспект занятия №30

Тема Исследование различных законов распределения

Вид занятия*: лабораторное занятие №3*

Цель занятия: познакомить с методами исследования различных законов распределения.

Задачи:

Учебные: 1) изучить методы Исследования различных законов распределения

2)научить создавать шаблоны для вычислений

Развивающие:

1) развитие логического мышления;

2) развитие памяти

Воспитательные:

1) воспитание аккуратности и внимательности

2) воспитание вдумчивости при принятии решений

Межпредметные связи:

Математика и Элементы высшей математики;

Алгоритмизация и программирование

Экономика и менеджмент

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Проверка усвоения пройденного материала:

10-15 мин

а) проверка Д.З. (решение у доски с комментариями)

3. Объяснение нового материала

45-50 мин

4. Закрепление нового материала (выполнение работы)

15-20 мин

5.Подведение итогов занятия.

1-3 мин

6. Домашнее задание:

1-3мин

а) Реферирование темы «Статистические оценки параметров распределения и их приложения»

Методические рекомендации к выполнению лабораторной работы №3

1. Теоретический обзор

Построив гистограмму относительных частот (частот) – аналог плотности распределения, мы сможем оценить вид распределения эмпирической выборки.

На следующем этапе анализа данных оценим числовые (точечные) характеристики выборки. Однако не забудем, что для установления качества или "правильности" любой оценки будем использовать *свойства* (требования) "*хороших оценок*": **несмещенность**, **эффективность** и **состоятельность**.

Числовые характеристики эмпирического распределения называются **выборочными характеристиками**. Рассмотрим некоторые из них:

- *выборочное среднее*

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \tag{1.3}$$

- *выборочная дисперсия* (несмещённая) и *среднее квадратическое отклонение*

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2; \tag{1.4}$$

$$S = \sqrt{S^2}; \tag{1.5}$$

- *выборочный коэффициент асимметрии*

$$Sk = \frac{\mu_3}{S^3}; \qquad \mu_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3; \tag{1.6}$$

- *выборочный коэффициент эксцесса*

$$Ex = \frac{\mu_4}{S^4} - 3; \qquad \mu_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4; \tag{1.7}$$

Вычисленные характеристики не позволяют судить о степени близости выборочных значений к оцениваемому параметру. Более предпочтительная процедура – построения интервала, который накрывает оцениваемый параметр с известной степенью достоверности. Такой подход называется "***интервальным оцениванием***".

Рассмотрим искомую процедуру. Пусть для параметра a получена *несмещённая* оценка $\tilde{a}$. Оценим возможную при этом ошибку. Назначим достаточно большую вероятность β (например: $\beta = 0.95, 0.97, 0{,}99\ \ldots$), такую, что событие с вероятностью β можно считать практически достоверным. Теперь найдем такое значение ε, для которого выполняется соотношение

$$P\left(\left|\tilde{a} - a\right| < \varepsilon\right) = \beta. \tag{1.8}$$

Выразим диапазон возможных значений ошибки, обусловленный заменой a на $\tilde{a}$, в явном виде, причем, ошибки большие по абсолютной величине ε будут появляться с малой вероятностью $\alpha = 1 - \beta$:

$$P(\tilde{a} - \varepsilon < a < \tilde{a} + \varepsilon) = \beta. \tag{1.9}$$

Таким образом, с вероятностью β неизвестное значение параметра a попадает в интервал

$$I_\beta = (\tilde{a} - \varepsilon;\ \tilde{a} + \varepsilon\ ). \tag{1.10}$$

Вероятность β принято называть ***доверительной вероятностью,*** а интервал I_β – ***доверительным интервалом.***

2. Анализ данных в пакете Statistica 6.0

Первичную обработку эмпирических данных можно провести, используя данные (файл) из папки <u>StatSoft\STATISTICA 6\Examples</u>, однако мы создадим новый файл (выборку).

Создание файла данных

Запустим программу Statistica и последовательно выполним команды *File→New.* Во всплывшем меню *Create New Document* заполним поля *Number of variable* – <u>1</u>; *Number of cases* – <u>125</u>; As a stand-alone window. Будет создана пустая таблица (файл данных), состоящая из одного столбца и 125 строк. Документ можно сохранить – *Save as* Lab_1.sta. Заполним таблицу данными, распределенными по закону $N(m_x, \sigma_x)$. Для этого правой клавишей мыши щелкнем по имени переменной. Во всплывшем меню выбираем опцию *Variable Specs….*, затем в меню переменной в нижнем поле *Long name …* зададим вид функции *Functions* распределения случайных данных:

=VNormal(Rnd(1);5;3) $N(5,\ 3)$;

Можно задать другие законы распределения эмпирических данных, например:

=Rnd(100) равномерно распределенные на [0; 100];

= VExpon(Rnd(1);5) показательное распределение $\lambda = 5$.

Построение вариационного ряда

Для построения вариационного ряда нужно правой клавишей мыши щелкнуть по имени переменной и во всплывшем меню выбрать опцию *Sort Cases*. Не забудьте указать направление сортировки – от меньшего, к большему. При необходимости сохранить исходные данные, вариационный ряд можно построить в следующей переменной, предварительно скопировав в нее данные. К сожалению, анализировать вариационный ряд большой выборки достаточно сложно, поэтому применим группирование данных.

Группирование данных

В программе существуют различные модули для группирования данных и построения различных графиков. Прежде, чем группировать данные, качественно оценим, насколько наша выборка близка к нормальному распределению. С этой целью построим график на нормальной вероятностной бумаге. Выполним последовательно команды *Statistics→Basic Statistics/Tables→Descriptive Statistics→Normal probability plot*; Variable – <u>Normal</u> (см. рис. 1.1).

Для группирования данных воспользуемся командами *Graphs→Histograms→*2D *Histograms*. В открывшемся меню выберем опции Variables – <u>Normal</u>, Graph type – <u>Regular</u>, Fit type – <u>Normal</u>, Categories – <u>50</u> (число интервалов группирования). Опция Fit type строит на гистограмме частот теоретическую кривую, имеющую те же параметры, что и исходные данные. Построенные графики можно отредактировать и сохранить (см. рис. 1.2).

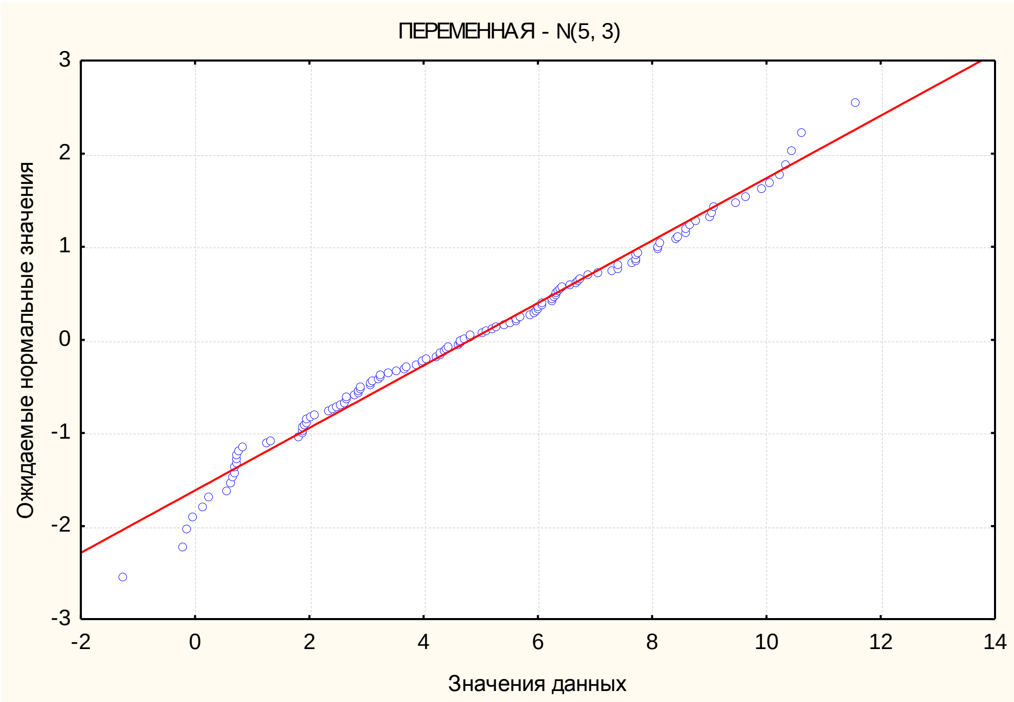


Рис. 1.1. График исходной выборки на нормальной вероятностной бумаге

При анализе графика следует учесть, чем ближе исходные данные к нормальному распределению, тем точнее они лягут на теоретическую прямую.

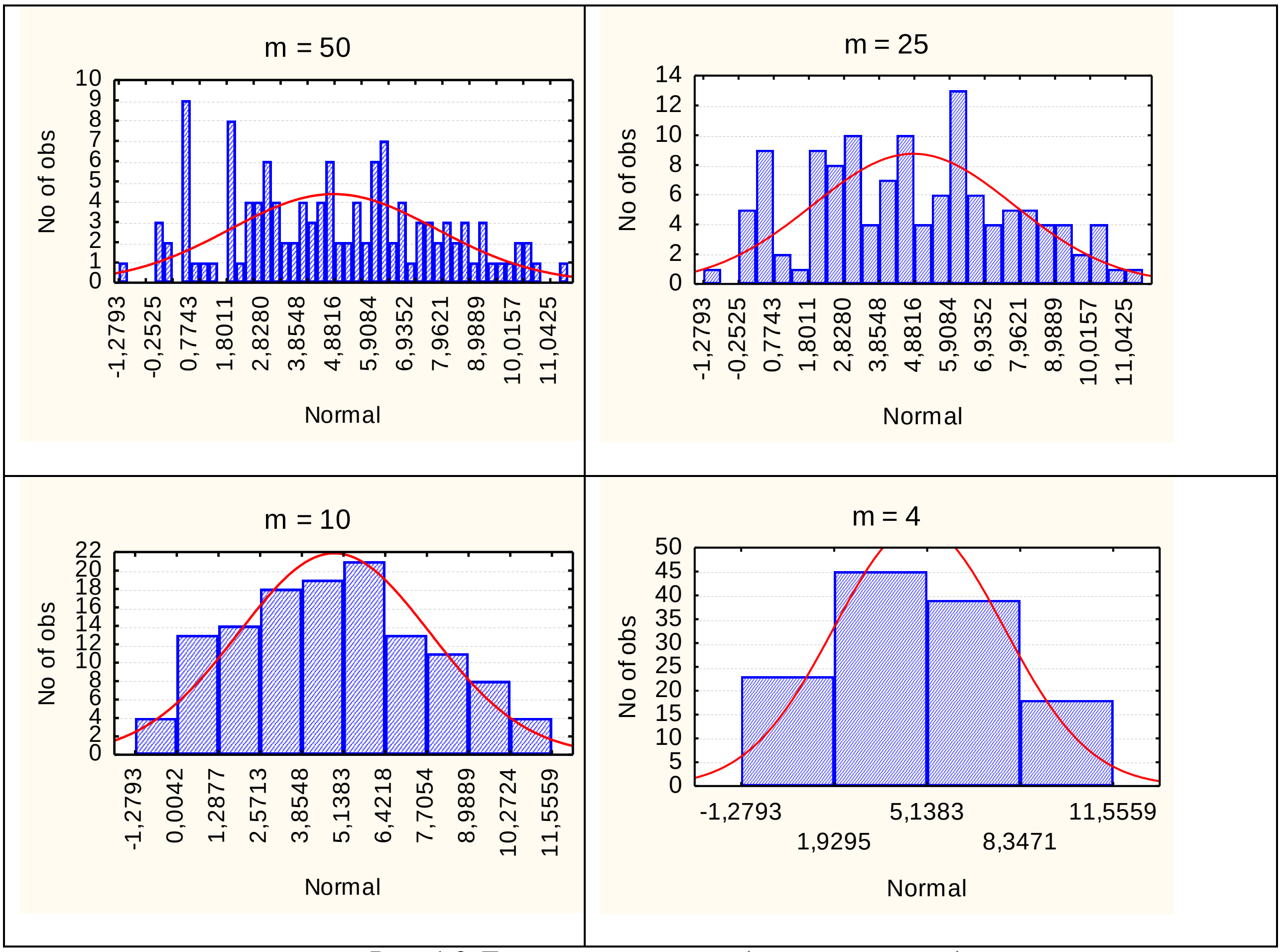


Рис. 1.2. Гистограмма частот (группированных)

На приведенных гистограммах (рис. 1.2) сплошной линией изображено нормальное распределение с параметрами равными выборочным характеристикам.

Числовые (точечные) характеристики выборки

Расчет характеристик выборки осуществим с помощью модуля *Basic Statistics/Tables* и процедуры этого модуля *Descriptive Statistics*. В открывшемся меню выберем имя переменной – <u>Normal</u> и перейдем на вкладку *Advanced*. Здесь можно выбрать интересующие нас характеристики, но, нажав клавишу *Select all stats*, выберем все. Отметим, что наряду с точечными характеристиками здесь рассчитываются границы доверительного интервала математического ожидания выборки при неизвестной дисперсии: *Interval* – <u>95</u>%. По умолчанию доверительная вероятность равна 95 %, при необходимости этот параметр можно изменить. Все характеристики сведены в таблицу (рис. 1.3).

	Descriptive Statistics (Lab_1.sta)								
Variable	Valid N	Mean	Confidence -95,000%	Confidence +95,000%	Geometric Mean	Harmonic Mean	Median	Mode	Frequency of Mode
Normal	125	4,82088	4,30299	5,33877		7,97978	4,64561	Multiple	1

Рис 1.3. Выборочные характеристики исходных данных

Интервальное оценивание

Так как процедуры нахождения доверительного интервала для математического ожидания при известной дисперсии и нахождения доверительного интервал для оценки дисперсии по выборочной дисперсии для данных, распределенных по нормальному закону, в пакете Statistica не реализованы, проведем эти расчеты вручную:

- *определение доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения* $N(m_x, \sigma_x)$ *при известной дисперсии*;

Согласно выражению (1.13) нам необходимо определить квантиль распределения $N(0,1)$. Для этого воспользуемся калькулятором вероятности: *Statistica→Probability Calculator→Distributions*. В открывшемся окне выберем распределение Z (Normal), затем выберем опцию *Two-tailed*, а в окне *p*: – соответствующее значение доверительной вероятности и команду *Compute*. Соответствующее значение квантиля $U_{1-\alpha/2}$ получим в окне *X:*. При необходимости имеется возможность распечатать график распределения с соответствующими квантилями – *Create Graph*, *Send to Report.*

- *нахождение доверительного интервала для оценки дисперсии по выборочной дисперсии*;

Для нахождения доверительного интервала (1.21) необходимо найти квантили распределения $\chi^2_{1-\alpha/2,k}$ и $\chi^2_{\alpha/2,k}$. Как и ранее воспользуемся калькулятором вероятности и выберем распределение *Chi?* – “хи-квадрат”. В поле *df*: – число степеней свободы $k = n - 1$, в поле *p*: – соответствующее значение, равное половине уровня значимости $\alpha/2$ и команду *Compute*. Для нахождения второго квантиля необходимо в поле *p*: – набрать значение равное $1 - \alpha/2$ команду *Compute*. Второй квантиль можно найти, не изменяя поле *p*:, а выделив поля *Invers* и (1-*Cumulative p*), затем выполним команду *Compute.*

Теперь, используя инженерный калькулятор (Windows Калькулятор Плюс), по формулам (1.12) и (1.21) определим границы соответствующих интервалов.

3. Задание

1. Изучить основные модули системы Statistica 6.0.
   - Ознакомиться с графическими возможностями программы, визуализацией исходных данных и результатов анализа.
   - Научиться автоматически создавать отчет в системе Statistica.
2. Провести первичный статистический анализ случайных данных:
   - получить случайную выборку заданного объема с заданным законом распределения;
   - исследовать различные способы группирования данных;
   - вычислить (получить) основные выборочные (точечные) характеристики;
   - считая случайную выборку распределенной по нормальному закону, вычислить доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии при заданной доверительной вероятности.

Конкретные задания для каждого варианта приведены в табл. 1.1. В таблице приняты следующие обозначений:

$N(m_x, \sigma_x)$ – гауссово распределение с соответствующим математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением;

$R[l,u]$ – равномерное распределение на интервале от *l* до *u*;

$E(\lambda)$ – показательное (экспоненциальное распределение) с соответствующим параметром λ.

Таблица 1.1

№	Распределение	n	β	№	Распределение	n	β
1	N(5,3)	105	0.9	14	R[-5, -1]	160	0.83
2	R[1, 5]	110	0.91	15	E[0.333]	166	0.84
3	E[5]	125	0.92	16	N(-2,10)	175	0.85
4	N(2,10)	115	0.93	17	R[40, 100]	170	0.86
5	R[4, 10]	122	0.94	18	E[0.111]	177	0.87
6	E[0.2]	130	0.95	19	N(15,25)	134	0.88
7	N(15,2)	135	0.96	20	R[35, 60]	143	0.89
8	R[5, 20]	140	0.97	21	E[10]	177	0.9
9	E[1]	137	0.98	22	N(11,11)	144	0.91
10	N(12,1)	145	0.99	23	R[0, 1]	155	0.92
11	R[4, 15]	147	0.80	24	E[3.33]	180	0.93
12	E[0.1]	150	0.81	25	N(-5,1)	185	0.94
13	N(-5,3)	111	0.82	26	R[-5, 5]	190	0.95

4. Контрольные вопросы

1. Каковы основные задачи математической статистики?
2. Как связан объем выборки с возможностью группирования данных?
3. Как необходимо увеличить объем выборки для увеличения оптимального количества интервалов вдвое, согласно формуле "Стерджесса"?
4. Каковы свойства эмпирической функции распределения?
5. Какими свойствами обладают “хорошие оценки”?

6. Можно ли задать значение доверительной вероятности равным единице?
7. Как связан параметр λ с числовыми характеристиками показательного распределения?

План-конспект занятия №31

Тема : Вычисление выборочных характеристик и доверительных интервалов

Вид занятия*: лабораторное занятие №4*

Цель занятия: закрепить навыки вычисления выборочных характеристик и доверительных интервалов.

Задачи:

Учебные: 1) повторить и закрепить ЗУН по изученной теме;

2)контроль усвоения материала.

Развивающие:

1) развитие логического мышления;

2) развитие памяти

Воспитательные:

1) воспитание аккуратности и внимательности

2) воспитание вдумчивости при принятии решений

Межпредметные связи:

Математика и Элементы высшей математики;
Логика
Алгоритмизация и программирование
Экономика и менеджмент

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Проверка усвоения пройденного материала:

10-15 мин

а) проверка Д.З. (решение у доски с комментариями)

3. закрепление материала (выполнение заданий)

60-65 мин

4.Подведение итогов занятия.

1-3 мин

5. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект[3], стр 204-220.
в) решить задачу[10], № 9.10, 9.12

Методические рекомендации к выполнению лабораторной работы №4

Статистическая методология исследования массовых явлений различает, как известно, два способа наблюдения в зависимости от полноты охвата объекта: сплошное и несплошное. Разновидностью несплошного наблюдения является выборочное исследование. Под **выборочным наблюдением** понимается несплошное наблюдение, при котором статистическому обследованию (наблюдению) подвергаются единицы изучаемой совокупности, отобранные случайным способом. Выборочное наблюдение ставит перед собой задачу – *по обследуемой части дать характеристику всей совокупности единиц* при условии соблюдения всех правил и принципов проведения статистического наблюдения и научно организованной работы по отбору единиц.

Совокупность отобранных для обследования единиц в статистике принято называть **выборочной**, а совокупность единиц, из которых производится отбор, - **генеральной**. Основные характеристики параметров генеральной и выборочной совокупности обозначаются определенными символами (табл.1).

Таблица 1.

Символы основных характеристик параметров генеральной и выборочной совокупностей

№ п/п	Характеристики	Генеральная совокупность	Выборочная Совокупность

1	Объем совокупности (численность единиц)	N	n
2	Численность единиц, обладающих обследуемым признаком	M	m
3	Доля единиц, обладающих обследуемым признаком	$p = \frac{M}{N}$	$w = \frac{m}{n}$
4	Средний размер признака	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$	$\tilde{x} = \frac{\sum x_i}{n}$
5	Дисперсия количественного признака	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})}{N}$	$\sigma_{\tilde{x}}^2 = \frac{\sum (x_i - \tilde{x})^2}{n}$
6	Дисперсия доли	$\sigma_p^2 = p(1-p)$	$\sigma_w^2 = w(1-w)$

Достоверность рассчитанных по выборочным данным характеристик в значительной степени определяется репрезентативностью выборочной совокупности, которая, в свою очередь, зависит от способа отбора единиц из генеральной совокупности. В каждом конкретном случае в зависимости от целого ряда условий, а именно, сущности исследуемого явления, объема совокупности, вариации и распределения наблюдаемых признаков, материальных и трудовых ресурсов, выбирают наиболее предпочтительную систему организации отбора, которая определяется *видом, методом* и *способом отбора*.

По *виду* различают индивидуальный, групповой и комбинированный отбор. При **индивидуальном отборе** в выборочную совокупность отбираются отдельные единицы генеральной совокупности, при **групповом отборе** – группы единиц, а **комбинированный отбор** предполагает сочетание группового и индивидуального отбора.

Метод отбора определяет возможность продолжения участия отобранной единицы в процедуре отбора.

Бесповторным называется отбор, при котором попавшая в выборку единица не возвращается в совокупность, из которой осуществляется дальнейший отбор.

При **повторном** отборе попавшая в выборку единица после регистрации наблюдаемых признаков возвращается в исходную (генеральную) совокупность для участия в дальнейшей процедуре отбора. Повторный метод отбора применяется в тех случаях, когда характер исследуемого явления предполагает возможность повторной регистрации единиц. Такая возможность, прежде всего, может иметь место в выборочных обследованиях населения в качестве покупателей, пациентов, избирателей, абитуриентов и т.д.

Способ отбора определяет конкретный механизм или процедуру выборки единиц из генеральной совокупности. В практике выборочных обследований наибольшее распространение получили следующие виды выборки:

- собственно-случайная; механическая; типическая; серийная; комбинированная.

Определение ошибок выборки

После проведения отбора для определения возможных границ генеральных характеристик рассчитываются **средняя (стандартная)** и **предельная ошибки выборки**.

Эти два вида ошибок связаны следующим соотношением:

$$\Delta = t \cdot \mu \,, \qquad (1)$$

где **Δ** - предельная ошибка выборки;

μ - средняя (стандартная) ошибка выборки;

t - коэффициент доверия, определяемый в зависимости от уровня вероятности **p**.

Ниже приведены некоторые значения t.

Таблица 2.

Значения коэффициента доверия

Вероятность, p_i	0,683	0,866	0,954	0,988	0,997	0,999
Значение t	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5

Величина средней ошибки выборки рассчитывается дифференцированно в зависимости от способа отбора и процедуры выборки. Так, ***при случайном повторном отборе*** средняя ошибка определяется по формуле:

$$\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{\text{n}}}, \qquad (2)$$

а ***при бесповторном***:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}, \qquad (3)$$

где σ^2 - выборочная (или генеральная) дисперсии;

σ - выборочное (или генеральное) среднее квадратическое отклонение;

n - объем выборочной совокупности;

N - объем генеральной совокупности.

Расчет средней и предельной ошибок выборки позволяет определить возможные пределы, в которых будут находиться характеристики генеральной совокупности. Например, для генеральной средней такие пределы устанавливаются на основе следующих соотношений:

$$\tilde{x} - \Delta_{\tilde{x}} \le \bar{x} \le \tilde{x} + \Delta_{\tilde{x}}, \qquad (4)$$

где $\bar{x}$ и $\tilde{x}$ - генеральная и выборочная средняя соответственно;

$\Delta_{\tilde{x}}$ - предельная ошибка выборочной средней.

Покажем практическое применение рассмотренной выше методики на следующих примерах.

Пример 1. При проверке веса импортируемого груза на таможне методом случайной **повторной** выборки было отобрано 200 изделий. В результате был установлен средний вес изделия 30 г. при среднем квадратическом отклонении 4 г. С вероятностью 0,997 определите пределы, в которых находится средний вес изделия в генеральной совокупности.

Решение. Рассчитаем сначала предельную ошибку выборки. Так как при p = 0,997 по таблице 2 имеем t = 3, то:

$$\Delta_{\tilde{x}} = t \cdot \frac{\sigma_{\tilde{x}}}{\sqrt{n}} = 3 \cdot \frac{4}{\sqrt{200}} = 0{,}84.$$

Определим пределы генеральной средней:

$$30 - 0{,}84 \le \bar{x} \le 30 + 0{,}84$$

или

$$29{,}16 \le \bar{x} \le 30{,}84.$$

Следовательно, с вероятностью 0,997 можно утверждать, что **средний вес изделий в генеральной совокупности находится в пределах от 29,16 г. до 30,84 г.**

Пример 2. В городе проживает 250 тыс. семей. Для определения среднего числа посещений торгового центра «Все для вас» за месяц была организована 2%-ная случайная **бесповторная выборка** семей. По ее результатам было получено следующее распределение семей по числу посещений центра:

Число посещений центра	0	1	2	3	4	5
Количество семей	1000	2000	1200	400	200	200

С вероятностью 0,954 определите пределы, в которых будет находиться среднее число посещений в генеральной совокупности.

Решение. Вначале на основе имеющегося распределения семей определим выборочные среднюю и дисперсию:

Число посещений, x_i	Количество семей, n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i - \tilde{x}$	$(x_i - \tilde{x})^2$	$(x_i - \tilde{x})^2 \cdot n_i$
0	1000	0	-1,5	2,25	2250
1	2000	2000	-0,5	0,25	500
2	1200	2400	0,5	0,25	300
3	400	1200	1,5	2,25	900
4	200	800	2,5	6,25	1250
5	200	1000	3,5	12,25	2450
Итого	**5000**	**7400**	**-**	**-**	**7650**

$$\tilde{x} = \frac{7400}{5000} \approx 1{,}5 \text{ (посещения);. } \sigma_x^2 = \frac{7650}{5000} \approx 1{,}53.$$

Вычислим теперь предельную ошибку выборки (с учетом того, что при р = 0,954 t = 2).

$$\Delta_{\tilde{x}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2_{\tilde{x}}}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1,53}{5000}\left(1-\frac{5000}{250000}\right)} \approx 0,035\,.$$

Следовательно, пределы генеральной средней:

$$\bar{x} = \tilde{x} \pm \Delta_{\tilde{x}} = 1,5 \pm 0,035\,.$$

Таким образом, с вероятностью 0,954 можно утверждать, что среднее число посещений торгового центра «Все для вас» семьями города практически не отличается от 1,5, т.е. в среднем на каждые две семьи приходится три посещения центра в месяц.

Наряду с определением ошибок выборки и пределов для генеральной средней эти же показатели могут быть определены для **доли признака**. В этом случае особенности расчета связаны с определением дисперсии доли, которая вычисляется так:

$$\sigma^2_w = w(1-w), \tag{5}$$

где $w = \dfrac{m}{n}$ - доля единиц, обладающих данным признаком в выборочной совокупности, определяемая как отношение количества соответствующих единиц к объему выборки.

Тогда, например, **при** собственно-случайном **повторном отборе** для определения средней (стандартной) ошибки выборки используется следующая формула:

$$\mu_w = \sqrt{\frac{\sigma^2_w}{n}} = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}. \tag{6}$$

Соответственно, **при бесповторном отборе**:

$$\mu_w = \sqrt{\frac{\sigma^2_w}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}. \tag{7}$$

Предельная ошибка доли признака:

$$\Delta_w = t \cdot \mu_w \tag{8}$$

Пределы доли признака в генеральной совокупности р выглядят следующим образом:

$$w - \Delta_w \le p \le w + \Delta_w \tag{9}$$

Рассмотрим пример.

Пример 3. С целью определения средней фактической продолжительности рабочего дня в торговой компании с численностью служащих 480 человек, в январе 2009 г. было проведена 25%-ная случайная бесповторная выборка. По результатам наблюдения оказалось, что у 10% обследованных потери времени достигали более 45 мин. в день. С вероятностью 0,683 установите пределы, в которых находится генеральная доля служащих с потерями рабочего времени более 45 мин. в день.

Решение. Определим объем выборочной совокупности:

$$n = 480 \cdot 0,25 = 120 \text{ чел.}$$

Выборочная доля w равна по условию 10%.

Учитывая, что при р = 0,683 t = 1, вычислим предельную ошибку выборочной доли:

$$\Delta_w = t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}(1-\frac{n}{N})} = 1 \cdot \sqrt{\frac{0,1(1-0,1)}{120}(1-\frac{120}{480})} = 0,0237 \approx 0,024 \text{ или } 2,4\%.$$

Пределы доли признака в генеральной совокупности:

$$10 - 2,4 \le p \le 10 + 2,4$$

или

$$7,6 \le p \le 12,4\,.$$

Таким образом, с вероятностью 0,683 можно утверждать, что доля работников учреждения с потерями рабочего времени более 45 мин. в день находится в пределах от 7,6% до 12,4%.

Определение доверительной вероятности

При построении доверительного интервала для генеральной средней или генеральной доли в случае больших выборок (порядка сотен наблюдений) определяется ***доверительная вероятность*** □ того, что отклонение выборочной средней (или доли) не превзойдет заданного числа □(по абсолютной величине):

$$P\left(\left|\bar{x}-\tilde{x}\right| \le \delta\right) = \Phi(z) = \gamma,\ \text{где}\quad z = \frac{\delta}{\mu_{\tilde{x}}} \qquad (10)$$

$$P\left(\left|w-p\right| \le \delta\right) = \Phi(z) = \gamma,\ \text{где}\quad z = \frac{\delta}{\mu_{w}} \qquad (11)$$

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$$ - функция (интеграл вероятностей) Лапласа.

Значения функции Лапласа приведены в приложении I.

Пример 4. Из партии, содержащей 2000 изделий, для проверки по схеме случайной бесповторной выборки было отобрано 200 изделий, среди которых оказалось 184 стандартных. Найти вероятность того, что доля нестандартных изделий во всей партии отличается от полученной доли в выборке не более чем на 0,02 (по абсолютной величине).

Решение: Имеем $N = 2000$, $n = 200$, $m = 200 - 184 = 16$. Тогда, выборочная доля нестандартных изделий $w = \frac{m}{n} = \frac{16}{200} = 0{,}08$. По формуле (7) найдем среднюю ошибку бесповторной выборки для доли:

$$\mu_w = \sqrt{\frac{0{,}08\cdot(1-0{,}08)}{200}\cdot\left(1-\frac{200}{2000}\right)} = 0{,}0182\ .$$

Искомую доверительную вероятность находим по формуле (11) и по приложению I:

$$P\left(\left|w-p\right| \le 0{,}02\right) = \Phi\left(\frac{0{,}02}{0{,}0182}\right) = \Phi(1{,}10) = 0{,}729\ .$$

Определение необходимого объема выборки

При проектировании выборочного наблюдения возникает вопрос о необходимой численности выборки. Эта численность может быть определена на базе допустимой ошибки при выборочном наблюдении, исходя из вероятности, на основе которой можно гарантировать величину устанавливаемой ошибки, и, наконец, на базе способа отбора.

Формулы необходимого объема выборки для различных способов формирования выборочной совокупности могут быть выведены из соответствующих соотношений, используемых при расчете предельных ошибок выборки. Наиболее часто применяются на практике выражения необходимого объема выборки для собственно-случайной и механической выборки:

$$\mathrm{n} = \frac{\mathrm{t}^2\sigma^2}{\Delta^2}\ \text{(повторный отбор);} \qquad (12)$$

$$\mathrm{n} = \frac{\mathrm{t}^2\sigma^2\mathrm{N}}{\Delta^2\mathrm{N}+\mathrm{t}^2\sigma^2}\ \text{(бесповторный отбор);} \qquad (13)$$

Пример 5. В 100 туристических агентствах города предполагается провести обследование среднемесячного количества реализованных путевок методом механического отбора. Какова должна быть численность выборки, чтобы с вероятностью 0,683 ошибка не превышала 3 путевок, если по данным пробного обследования дисперсия составляет 225.

Решение. Рассчитаем необходимый объем выборки:

$$n = \frac{1^2\cdot 225\cdot 100}{3^2\cdot 100 + 1^2\cdot 225} = \frac{22500}{1125} = 20\ \text{агентств.}$$

Оценка генеральных характеристик по малой выборке.

В практике статистического исследования в условиях рыночной экономики все чаще приходится сталкиваться с небольшими по объему так называемыми малыми выборками. Под **малой выборкой** понимается такое выборочное наблюдение, численность единиц которого не превышает 30 и может доходить до 4 – 5 единиц. В настоящее время малая выборка используется более широко, чем раньше, прежде всего за счет статистического изучения деятельности малых и средних предприятий, коммерческих банков, фермерских хозяйств и т.д. Их количество в определенных случаях, особенно при региональных исследованиях, а также величина характеризующих их показателей (например, численность занятых) часто незначительны. Поэтому хотя общий принцип выборочного обследования (с увеличением объема выборки повышается точность выборочных данных) остается в силе, иногда приходится ограничиваться малым числом наблюдений. Наряду со статистическим изучением рыночных структур эта необходимость возникает при выборочной проверке качества продукции в торговле (например, если проведение исследований связано с порчей или уничтожением обследуемых образцов), в научно-исследовательской работе и в ряде других случаев.

Величина ошибки малой выборки определяется по формулам, отличным от формул выборочного наблюдения со сравнительно большим объемом выборки. Средняя ошибка малой выборки μ_{MB} определяется по формуле

$$\mu_{M.B} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{MB}}{n}}, \qquad (14)$$

Где σ^2_{MB} – дисперсия малой выборки, которая вычисляется по формуле

$$\sigma^2_{MB} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x})^2}{n-1} \qquad (15)$$

Предельная ошибка малой выборки Δ_{MB} определяется по формуле:

$$\Delta_{MB} = t \cdot \mu_{MB} \qquad (16)$$

Значение коэффициента доверия t зависит не только от значений доверительной вероятности γ, но и от числа единиц выборки n. Для отдельных значений t и n доверительная вероятность γ малой выборки определяется по специальным таблицам Стьюдента, в которых даны распределения стандартизированных отклонений:

$$t = \frac{\tilde{x} - \bar{x}}{\sigma_{M.B}} \qquad (17)$$

Приведем выдержку из таблицы распределения Стьюдента.

Таблица 3.

Распределение вероятности в малых выборках в зависимости от коэффициента доверия t и объема выборки n*

t \ n	4	5	6	7	8	9	10	15	20	∞
0,5	0,347	0,356	0,362	0,366	0,368	0,370	0,371	0,376	0,377	0,383
1,0	0,609	0,626	0,637	0,644	0,649	0,654	0,657	0,666	0,670	0,683
1,5	0,769	0,792	0,806	0,816	0,823	0,828	0,832	0,846	0,850	0,865
2,0	0,861	0,884	0,898	0,908	0,914	0,920	0,923	0,936	0,940	0,954
2,5	0,933	0,946	0,955	0,959	0,963	0,966	0,968	0,975	0,978	0,988
3,0	0,942	0,960	0,970	0,970	0,980	0,938	0,985	0,992	0,993	0,997

* При n = ∞ в таблице даны вероятности нормального распределения.

Как видно из таблицы, при увеличении n это распределение стремится к нормальному и при n = 20 уже мало от него отличается.

При проведении малых выборочных обследований важно иметь в виду, что чем меньше объем выборки, тем больше различие между распределением Стьюдента и нормальным распределением.

Поскольку, при проведении исследований по малой выборке в качестве доверительной вероятности чаще всего применяется значение **γ = 0,95** или **γ = 0,99**, то для определения предельной ошибки выборки $\Delta_{M.B}$ используются следующие показатели распределения Стьюдента:

Таблица 4.

Значения коэффициента доверия малой выборки

n / γ	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	20
γ=0,95	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23	2,2	2,18	2,16	2,12	2,13	2,11	2,08
γ=0,99	3,71	3,50	3,36	3,25	3,17	3,11	3,05	3,01	2,92	2,95	2,9	2,83

Покажем, как пользоваться таблицей распределения Стьюдента.

Пример 4. Предположим, что выборочное обследование 10 покупателей магазина показало, что на обслуживание одного покупателя продавец затрачивает времени (мин.): 3,4; 4,7; 1,8; 3,9; 4,2; 3,9; 3,7; 3,2; 2,2; 3,9. Найдем выборочные средние затраты:

$$\tilde{x} = \frac{3{,}4 + 4{,}7 + 1{,}8 + \ldots + 2{,}2{,}+3{,}9}{10} = 3{,}49 \text{ мин.}$$

Выборочная дисперсия:

$$\sigma^2_{MB} = \frac{(3{,}4 - 3{,}49)^2 + (4{,}7 - 3{,}49)^2 + \ldots + (3{,}9 - 3{,}49)^2}{9} = 0{,}792 .$$

Отсюда средняя ошибка малой выборки равна:

$$\mu_{M.B} = \sqrt{\frac{0{,}792}{10}} = 0{,}28 \text{ мин.}$$

По таблице 3. находим, что для коэффициента доверия t = 2 и объема малой выборки n =10 вероятность равна 0,923. Таким образом, с вероятностью 0,923 можно утверждать, что расхождение между выборкой и генеральной средними лежит в пределах от -2μ до +2μ, т.е. разность $\tilde{x} - \bar{x}$ не превысит по абсолютной величине 0,56 (2×0,28). Следовательно, средние затраты времени во всей совокупности будут находится в пределах от **2,93** (3,49 – 0,28) до **4,05** (3,49 + 0,28) мин. Вероятность того, что это предположение в действительности неверно и ошибка по случайным причинам будет по абсолютной величине больше, чем 0,56, равна: 1-0,924 = 0,076.

Если задать доверительную вероятность заранее, например взять γ = 0,99, тогда по таблице 4 надо найти коэффициент доверия для n =10. Он равен 3,25. Тогда, с вероятностью 0,99 средние затраты времени во всей совокупности будут находится в пределах от **2,58** (3,49 – 3,25·0,28) до **4,4** (3,49 + 3,35·0,28) мин.

Задания лабораторной работы №4

Задание 1

По данному интервальному распределению значений признака X некоторой выборочной совокупности, составленной по схеме бесповторного (повторного) отбора из генеральной совокупности объема N необходимо:

1. найти вероятность того, что среднее генеральное значение отличается от среднего значения в выборке по абсолютной величине не более чем на □;
2. определить границы, в которых с надежностью □ заключено среднее значение генеральной совокупности;
3. рассчитать объем выборки, необходимой для того, чтобы полученные в пункте 2 границы генеральной средней гарантировать с вероятностью □$_1$;
4. найти вероятность того, что доля объектов генеральной совокупности, значение признака X которых не больше (не меньше) заданного значения **A**, отличается от соответствующей доли в выборке не более чем не □$_1$ (по абсолютной величине);
5. определить границы, в которых с надежностью □$_2$ заключена доля указанных в пункте 4 значений генеральной совокупности;
6. рассчитать объем выборки, необходимой для того, чтобы полученные в пункте 2 границы для генеральной доли гарантировать с вероятностью □$_3$;

Варианты задания № 1

Вариант № 1

Границы интервалов	147 - 155	155 - 163	163 - 171	171 - 179	179 - 187	187 - 195
Интервальные частоты	25	39	57	68	40	21

Вариант № 2

Границы интервалов	50 - 62	62 - 74	74 - 86	86 - 98	98 - 110	110 - 122
Интервальные частоты	57	73	95	88	70	67

Вариант № 3

Границы интервалов	15,6 -17	17 –18,4	18,4 –19,8	19,8 – 21,2	21,2 – 22,6	22,6 - 24
Интервальные частоты	8	16	33	29	22	12

Вариант № 4

Границы интервалов	35,2 -39,2	39,2 -43,2	43,2-47,2	47,2-51,2	51,2-55,2	55,2-59,2
Интервальные частоты	10	16	46	69	35	24

Вариант № 5

Границы интервалов	менее 3	3 – 4,8	4,8 - 6,6	6,6 - 8,4	8,4 -10,2	более 10,2
Интервальные частоты	51	64	83	102	57	43

Вариант № 6

Границы интервалов	88,4-90,0	90-91,6	91,6-93,2	93,2-94,8	94,8-96,4	96,4-98,0
Интервальные частоты	32	55	65	71	48	39

Вариант № 7

Границы интервалов	0,56-0,58	0,58-0,60	0,60-0,62	0,62-0,64	0,64-0,66	0,66-0,68
Интервальные частоты	67	82	106	98	77	50

Вариант № 8

Границы интервалов	24 - 28	28 - 32	32 - 36	36 - 40	40 - 44	44 - 48
Интервальные частоты	41	59	70	63	58	39

Вариант № 9

Границы интервалов	430-490	490-550	550-610	610-670	670-730	730-790
Интервальные частоты	11	16	23	27	18	15

Вариант № 10

Границы интервалов	7,45-8,25	8,25-9,05	9,05-9,85	9,85-10,65	10,65-11,45	11,45-12,25
Интервальные частоты	33	52	76	61	49	29

Вариант № 11

Границы интервалов	0,53-0,55	0,55-0,57	0,57-0,59	0,59-0,61	0,61-0,63	0,63-0,65
Интервальные частоты	67	84	115	96	78	60

Вариант № 12

Границы интервалов	900-984	984-1068	1068-1152	1152-1236	1236-1320	1320-1404
Интервальные частоты	7	13	16	21	17	6

Вариант № 13

Границы интервалов	19,1-21,3	21,3-23,5	23,5-25,7	25,7-27,9	27,9-30,1	30,1-32,3
Интервальные частоты	22	32	43	39	25	19

Вариант № 14

Границы интервалов	216-248	248-280	280-312	312-344	344-376	376-408
Интервальные частоты	14	18	26	16	14	12

Вариант № 15

Границы интервалов	51 - 65	65 - 79	79 - 93	93 - 107	107 - 121	121 - 135
Интервальные частоты	37	40	51	58	48	36

Вариант	Выборка	**N**	□	□	$\square_1$	$\mathbf{x_i<(>)A}$	$\square_1$	$\square_{\square}$	$\square_{\square}$
1	повторная	5000	2	0,866	0,988	$x_i > 175$	0,02	0,683	0,866
2	бесповторная	11000	1,8	0,683	0,954	$x_i > 92$	0,01	0,866	0,988
3	повторная	6500	0,3	0,954	0,999	$x_i \geq 20,5$	0,04	0,683	0,954
4	повторная	4000	0,9	0,683	0,866	$x_i \leq 41,2$	0,04	0,954	0,997
5	бесповторная	10000	0,12	0,988	0,997	$x_i > 5,7$	0,05	0,866	0,997
6	бесповторная	12000	0,5	0,866	0,988	$x_i < 94$	0,06	0,683	0,954
7	бесповторная	20000	0,002	0,954	0,999	$x_i < 0,6$	0,01	0,954	0,988
8	повторная	7000	0,6	0,954	0,997	$x_i > 35$	0,02	0,866	0,954

9	бесповторная	15000	12	0,866	0,997	$x_i < 600$	0,04	0,683	0,999
10	повторная	2000	0,2	0,683	0,954	$x_i > 11$	0,05	0,954	0,999
11	бесповторная	8000	0,001	0,954	0,997	$x_i < 0{,}6$	0,05	0,988	0,997
12	повторная	4500	25	0,683	0,997	$x_i < 1000$	0,03	0,866	0,997
13	бесповторная	12500	0,7	0,683	0,954	$x_i < 25$	0,02	0,683	0,988
14	бесповторная	18000	6	0,866	0,997	$x_i > 300$	0,04	0,866	0,954
15	повторная	9000	4	0,866	0,997	$x_i > 100$	0,04	0,954	0,999

Алгоритмы выполнения Задания 1

1. Заполнить таблицу для определения выборочной средней и выборочного среднего квадратического отклонения:

№	Середина интервала x_i	Частота n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
1				
…				
k				
Сумма	——	n	$\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i$	$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i$

2. Вычислить (три знака после запятой)

2.1 Среднее выборочное значение $\tilde{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$;

2.2 Выборочную дисперсию $\sigma_{\tilde{x}}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i}{n} - (\tilde{x})^2$;

2.3 Выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{\sigma_{\tilde{x}}^2}$;

2.4 Среднюю (стандартную) ошибку выборочной средней

для повторной выборки $\mu_{\tilde{x}} = \dfrac{\sigma_{\tilde{x}}}{\sqrt{\mathrm{n}}}$,

для бесповторной выборки $\mu_{\tilde{x}} = \sqrt{\dfrac{\sigma_{\tilde{x}}^2}{n}\left(1 - \dfrac{n}{N}\right)}$;

2.5 Аргумент функции Лапласа $z = \dfrac{\delta}{\mu_{\tilde{x}}}$ (два знака после запятой);

3. По приложению I определить вероятность $P(|\tilde{x} - \bar{x}| \le \delta) = \Phi(z)$;

4. Для вероятности □ по таблице 2 найти коэффициент доверия **t;**

5. Вычислить предельную ошибку выборочной средней $\Delta_{\tilde{x}} = t \cdot \mu_{\tilde{x}}$;

6. Записать доверительный интервал для генеральной средней $\tilde{x} - \Delta_{\tilde{x}} \le \bar{x} \le \tilde{x} + \Delta_{\tilde{x}}$;

7. Для вероятности □**₁** по таблице 2 найти коэффициент доверия $\mathbf{t_1}$**;**

8. Найти объем выборки

повторный отбор: $\mathrm{n}_1 = \dfrac{\mathrm{t}_1^2 \sigma_{\tilde{x}}^2}{\Delta_{\tilde{x}}^2}$;

бесповторный отбор: $\mathrm{n} = \dfrac{\mathrm{t}_1^2 \sigma_{\tilde{x}}^2 \mathrm{N}}{\Delta_{\tilde{x}}^2 \mathrm{N} + \mathrm{t}_1^2 \sigma_{\tilde{x}}^2}$;

9. Найти долю объектов генеральной совокупности, значение признака X которых не больше (не меньше) заданного значения **А**: $w=\frac{m}{n}$;

10. Вычислить

10.1 Выборочную дисперсию доли $\sigma_w^2 = w(1-\text{w})$;

. 10.2 Среднюю (стандартную) ошибку выборочной доли

для повторной выборки $\mu_w = \sqrt{\frac{\sigma_\text{w}^2}{\text{n}}} = \sqrt{\frac{\text{w}(1-\text{w})}{\text{n}}}$

для бесповторной выборки $\mu_w = \sqrt{\frac{\sigma_\text{w}^2}{\text{n}}\left(1-\frac{\text{n}}{\text{N}}\right)} = \sqrt{\frac{\text{w}(1-\text{w})}{\text{n}}\left(1-\frac{\text{n}}{\text{N}}\right)}$;

10.3 Аргумент функции Лапласа $z_1 = \frac{\delta_1}{\mu_w}$ (два знака после запятой)**;**

11. По приложению I определить вероятность $P(|w-p| \le \delta_1) = \Phi(z_1)$;

12. Для вероятности $\square_2$ по таблице 2 найти коэффициент доверия $\mathbf{t_2}$**;**

13. Вычислить предельную ошибку выборочной средней $\Delta_w = t_2 \cdot \mu_w$;

14. Записать доверительный интервал для генеральной средней $w-\Delta_w \le p \le w+\Delta_w$;

15. Для вероятности $\square_3$ по таблице 2 найти коэффициент доверия $\mathbf{t_3}$**;**

16. Найти объем выборки

повторный отбор: $\text{n}_2 = \frac{\text{t}_3^2\sigma_w^2}{\Delta_w^2}$;

бесповторный отбор: $\text{n}_2 = \frac{\text{t}_3^2\sigma_w^2\text{N}}{\Delta_w^2\text{N}+\text{t}_3^2\sigma_w^2}$;

Задание 2

По данным ***n*** измерений некоторой величины требуется:

1) определить выборочные характеристики $\bar{x}$, σ^2;
2) найти границы, в которых с надежностью γ заключено истинное значение измеряемой величины.

Варианты задания № 2

Вариант № 1

15,2; 13,1; 14,7; 13,6; 15,0; 14,2; 15,1; 13,3; 14,9; 13,5. $\gamma = 0{,}99$

Вариант № 2

141; 153; 139; 146; 151; 144; 149; 152; 140; 136; 147; 148; 132; 150; 143; 145. $\gamma = 0{,}95$

Вариант № 3

55; 52; 56; 54; 51; 52; 57; 50; 42; 44; 51; 57; 58; 53; 54; 49. $\gamma = 0{,}99$

Вариант № 4

0,22; 0,41; 0,32; 0,27; 0,35; 0,39; 0,28; 0,26; 0,33; 0,25. $\gamma = 0{,}95$

Вариант № 5

21,1; 23,4; 22,7; 19,6; 25,3; 24,4; 17,8; 23,3; 20,7; 22,5. $\gamma = 0{,}95$

Вариант № 6

37; 36; 41; 40; 42; 35; 38; 37; 42; 41; 33; 39; 44; 43; 34; 39. $\gamma = 0{,}99$

Вариант № 7

274; 251; 246; 254; 268; 238; 199; 243; 194; 247; 288; 187; 255; 196; 194; 245. $\gamma = 0{,}95$

Вариант № 8

87; 82; 73; 51; 52; 57; 50; 60; 42; 44; 51; 57; 58; 53; 54; 49. $\gamma = 0{,}99$

Вариант № 9

64,3; 63,8; 66,7; 59,6; 60,0; 61,8; 63,1; 62,6; 58,9; 63,5. $\gamma = 0{,}95$

Вариант № 10

107; 111; 104; 110; 107; 109; 103; 100; 105; 108; 112; 102; 105; 106; 114; 108. $\gamma = 0{,}95$

Вариант № 11

77; 66; 64; 72; 67; 75; 68; 71; 63; 70; 62; 65; 74; 68; 71; 69. $\gamma = 0{,}99$

Вариант № 12

174; 151; 146; 154; 168; 138; 199; 143; 194; 147; 188; 187; 155; 196; 194; 145. $\gamma = 0{,}95$

Вариант № 13

37; 32; 23; 31; 22; 27; 30; 24; 32; 34; 31; 27; 28; 33; 35; 38. $\gamma = 0{,}99$

Вариант № 14

74,3; 63,8; 76,7; 69,6; 70,2; 65,8; 63,1; 72,6; 68,9; 63,5. $\gamma = 0{,}95$

Вариант № 15

17; 11; 14; 10; 17; 19; 13; 11; 15; 18; 12; 12; 15; 16; 14; 18. $\gamma = 0{,}95$

Алгоритмы выполнения Задания 2

1. Вычислить (три знака после запятой)

1.1 Среднее выборочное значение $\tilde{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$;

1.2 Выборочную дисперсию малой выборки $\sigma_{MB}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x})^2}{n-1}$

2. Среднюю (стандартную) ошибку выборочной средней : $\mu = \sqrt{\dfrac{\sigma_{MB}^2}{n}}$;

3. Для вероятности □ по таблице 4 найти коэффициент доверия **t;**

4. Вычислить предельную ошибку выборочной средней $\Delta = t \cdot \mu$;

5. Записать доверительный интервал для генеральной средней $\tilde{x} - \Delta \le \bar{x} \le \tilde{x} + \Delta$.

План-конспект занятия №32

Тема : Моделирование случайных величин с помощью физических экспериментов

Вид занятия*: теоретическое занятие*

Цель занятия: Выполнение упражнений на закрепление материала по теме «Метод статистических испытаний»

Задачи:

Учебные: 1) повторить и закрепить ЗУН по изученной теме;

2)контроль усвоения материала.

Развивающие:

1) развитие логического мышления;

2) развитие памяти

Воспитательные:

1) воспитание аккуратности и внимательности

2) воспитание вдумчивости при принятии решений

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Проверка усвоения пройденного материала:

10-15 мин

а) проверка Д.З. (решение у доски с комментариями)

3. закрепление материала (выполнение заданий)

60-65 мин

4.Подведение итогов занятия.

1-3 мин

5. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект [3], стр 221-236.

в) решить задачу[1], № 1,2,3

Примеры моделирования физических экспериментов

Чтобы изучить особенности поведения некоторого индивидуума в той или иной ситуации, необходимо описать как такого индивидуума, так и ту среду, в которой он может находиться. В таких случаях говорят об *идеальных моделях* состояний.

Например, игра в шахматы. Трудно предсказать все возможные ходы противника, но при подготовке к игре, квалифицированный шахматист найдет возможность просмотреть записи нескольких прежних партий своего будущего противника и попробует оценить его манеру игры, усмотреть лучшие его комбинации и др. А, именно, построить модель игры своего противника, спрогнозировать ее, согласно построенной гипотезе.

Смоделировать также можно поведение спасателей в различных ситуациях, поведение автомобиля на скользкой дороге, поведение реки в весеннее половодье.

В таких случаях, в принципе, можно вести речь о желании построить *идеальную модель* будущей ситуации. *Идеальная модель* может быть информационной, математической, графической и иной, оптимальной для прогнозируемой ситуации.

Моделирование, связанное с построением идеальной модели зарекомендовало себя с лучшей стороны, ходя идеальная модель может быть весьма далекой от реальной ситуации.

Моделирование идеальной ситуации осуществляется на основе различных принципов. К таковым относится:

Принцип статистического перебора

Принцип сравнения с эталоном.

Принцип комбинированных сочетаний

План-конспект занятия №33

Тема : Применение метода статистических испытаний

Вид занятия*: лабораторное занятие №5*

Цель занятия: закрепить навыки применении метода статистических испытаний

Задачи:

Учебные: 1) повторить и закрепить ЗУН по изученной теме;

2)контроль усвоения материала.

Развивающие:

1) развитие логического мышления;

2) развитие памяти

Воспитательные:

1) воспитание аккуратности и внимательности

2) воспитание вдумчивости при принятии решений

Межпредметные связи:

Математика и Элементы высшей математики;

Алгоритмизация и программирование

Экономика и менеджмент

Ход занятия:

1.Организационный момент

1-3 мин

(взаимное приветствие, постановка темы и задач занятия)

2. Проверка усвоения пройденного материала:

10-15 мин

а) проверка Д.З. (решение у доски с комментариями)

3. закрепление материала (выполнение заданий)

60-65 мин

4.Подведение итогов занятия.

1-3 мин

5. Домашнее задание:

1-3мин

а) выучить конспект[3], стр 204-220.

в) подготовка к экзамену

Методические рекомендации к выполнению лабораторной работы №5

Цель работы: Изучение метода Монте-Карло.

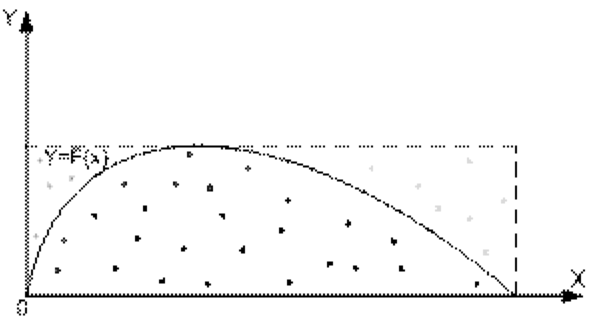
Теоретические сведения.

Метод статистических испытаний.

Метод статистических испытаний, или метод Монте-Карло представляет собой численный метод, состоящий в получении оценок вероятностных характеристик, совпадающих с решением аналитических задач (например, с решением уравнений и вычислением определенного интеграла). Впоследствии этот метод стал применяться для имитации процессов, происходящих в системах, внутри которых есть источник случайности или которые подвержены случайным воздействиям. Он получил также название метода **статистического моделирования**.

В основе метода лежит многократно повторяемый эксперимент на модели физической системы с использованием случайных чисел и дальнейшая статистическая обработка полученных результатов. Распространению метода способствовало появление электронной вычислительной техники с высокой производительностью, которая обеспечивает генерацию с большой скоростью псевдослучайных чисел, необходимых для реализации метода.

Механизм метода можно пояснить на примере вычисления определенного интеграла. Для определения площади под графиком функции Y=F(X):



что является графической интерпретацией определенного интеграла, можно использовать следующий подход:

- ограничим функцию прямоугольником, площадь которого $S_{прямоугольника}$ легко вычисляется;
- внутрь прямоугольника поместим случайным образом N точек, координаты которых будем получать с помощью специальных датчиков (генераторов) случайных чисел;
- определим число точек N', которые будут находиться ниже графика функции;

Тогда значение интеграла (площадь под графиком функции) определится из выражения:

$$S = \frac{N'}{N} S_{прямоугольника}$$

Метод Монте-Карло широко применяется в различных областях, имеет ряд разновидностей и модификаций, зависящих от особенностей решаемых с его помощью задач и повышающих точность и вычислительную эффективность.

Имитация событий, составляющих полную группу.

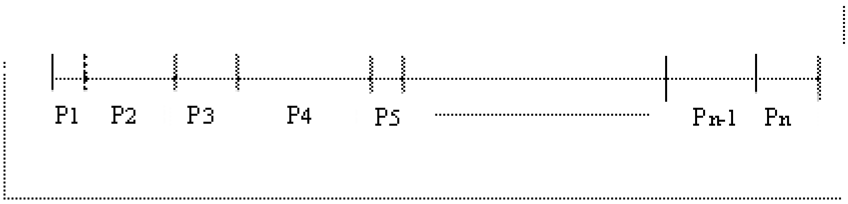
Пусть события $A_i,\ (i = 1,\dots n)$, составляют полную группу [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Тогда вероятности этих событий P_i удовлетворяют равенству:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

Имитация факта появления одного из событий A_i $(i=1,n)$ состоит к проверке неравенств:

$$\sum_{i=1}^{k-1} P_i \le x \le \sum_{i=1}^{k} P_i,\ k = 1,\dots n,\ P_0 = 0$$

Выполнение k-го неравенства эквивалентно наступлению события A_k. Этот алгоритм иногда называют алгоритмом "розыгрыша по жребию". Его можно интерпретировать как установление номера k-го отрезка длиной P_k, на который пало случайное число x, при условии разбиения отрезка единичной длины на отрезки с длинами $P_1, P_2, \ldots P_n$, $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]:



Типичным для практики является представление данных наблюдения за какими-либо событиями в виде таблицы, в которой регистрируются частоты наступления этих событий. Если события объединять в группы, поставив в соответствие каждой группе индекс $k=1,\ldots, N$ (k, в частности, может означать номер временного интервала наблюдения, число на игральной кости и т.п.), то таблица вида

k	1	2	3	…	N
f_k					

будет представлять собой число зарегистрированных в процессе наблюдения наступлений событий для каждой группы, или таблицу частот. Если поделить значения частот на сумму их значений, то полученные величины можно рассматривать как приближения к вероятностям появления событий каждой группы и использовать для имитации появления событий в моделях.

Программа на языке C++, реализующая алгоритм выбора по жребию, имеет следующий вид:

```
//Распределение задаваемое частотами
    float partval(int parts, int nums[], float vals[])
    {
        int i;
        float  sum, bleft,rnd=rundum();
        for (i=0,sum=0; i<parts; i++)  sum+=nums[i];
        for (i=0, bleft=0; i<parts && rnd>=bleft; bleft+=(float)nums[i]/sum, i++) ;
        return(vals[i-1]);
    }
```

Таблица частот задается первыми *parts* элементами массива *nums* частот появления и массива *vals* значений случайной величины.

Некоторые формулы теории вероятностей.

Для вычисления теоретических значений вероятностей безотказной работы системы, состоящей из ненадежных элементов, следует использовать следующие выражения теории вероятностей [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Вероятность одновременного наступления независимых событий ***A*** и ***B*** находится как произведение вероятностей наступления каждого события:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Для полной группы несовместных событий $A_1, A_2, \ldots A_n$, т.е., событий, для которых $P(A_iA_j) = 0$, для любых $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$ и некоторого события ***B*** справедлива формула полной вероятности: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B / A_i) \cdot P(A_i)$ где $P(B / A_i)$ есть условная вероятность наступления события ***B*** при условии наступления события A_i.

Задание.

В работе проводится оценивание вероятности безотказной работы технических схем на основе метода статистических испытаний и сравнение результата с результатом, полученным с помощью вероятностной модели.

Подготовка инструментария эксперимента.

Соберите проект C++ в соответствии с указаниями, содержащимися в Приложении (используется модуль 001).

Запустите табличный редактор Microsoft Excel.

Оценка надежности однофункциональной схемы.

1. Из каталога стандартных компонентов (см. 0) составьте исследуемую схему. Все компоненты, номера которых указаны в строке с номером варианта в таблице вариантов (см. 0), соединяются последовательно, один за другим.

Номер варианта=<Порядковый номер в списке группы>

Схема, таким образом, выполняет одну функцию.

Работоспособность всей схемы определяется одновременной работоспособностью всех трех компонентов.

2. Настройте текст раздела исходного CPP-модуля, включив в него:

- описание констант со значениями безотказной работы отдельных блоков по значениям, приведенным в 0;
- условия нахождения системы в работоспособном состоянии при проведении ее проверки

3. Отключите выполнение ненужных разделов программы, установив в разделе “Параметры модели” значения NexpR=0 и NexpE=0.

4. Осуществите пробные прогоны программы с небольшим значением NexpS и изучите трассировочный вывод.

5. Осуществите прогон программы, задав в качестве числа испытаний значение NexpS=100000. Результаты следует занести в Excel-таблицу:

№N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**СРЕД-НЕЕ**
100000						

Чтобы отменить вывод в файл итогов каждого испытания, возьмите в знаки комментария оператор вывода получаемого значения в цикле.

6. Проанализируйте полученные данные.

7. Пользуюсь формулами теории вероятностей (см. раздел 0), посчитайте точное значение вероятности безотказной работы системы и сравните его со значением, полученным экспериментальным путем.

Оценка надежности многофункциональной схемы.

Выполните все шаги раздела 0 для случая, когда моделируется схема с тремя функциями (ветвями). Иначе говоря, компоненты образуют три параллельные цепочки таким образом, что при каждом испытании включается одна из трех веток компонентов с вероятностями:

$P_1 = 0{,}2$, $P_2 = 0{,}3$, $P_3 = 0{,}5$.

Контрольные вопросы.

1) В чем заключается идея метода Монте-Карло?

2) Чем достигается статистическая точность метода?

3) Каковы основные достоинства и недостатки метода?

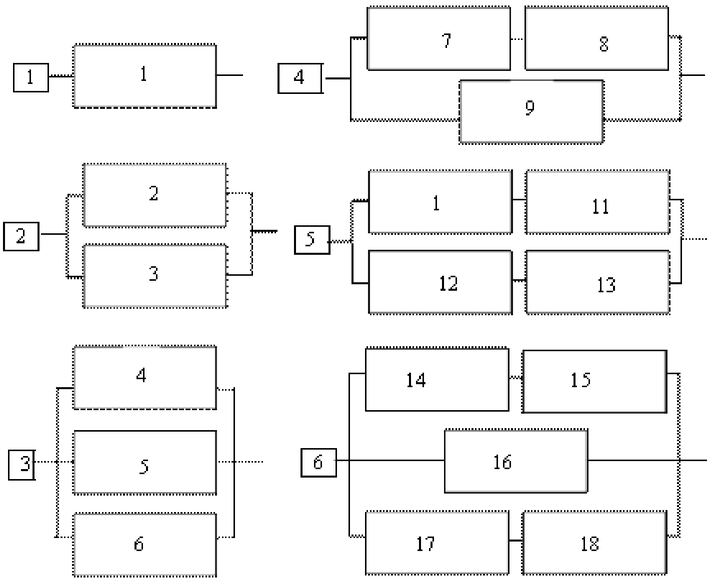
4) Как зависит точность результата, полученного на основе метода статистических испытаний, от числа проведенных испытаний?

5) Как можно повысить вычислительную эффективность (на примере данной работы)?

6) Как имитируются события, образующие полную группу событий?

Варианты исходных данных.

Компоненты моделируемой схемы.



Варианты соединений компонентов в общую схему.

Компонент№	**I**	**II**	**III**
1	1	2	3
2	1	2	4
3	1	2	5
4	1	2	6
5	1	3	4
6	1	3	5
7	1	3	6
8	1	4	5
9	1	4	6
10	1	5	6
11	2	3	4
12	2	3	5
13	2	3	6
14	2	4	5
15	2	4	6
16	2	5	6
17	3	4	5
18	3	4	6
19	3	5	6
20	4	5	6

Надежность блоков

№	**P**
1	0,95
2	0,80
3	0,75
4	0,70
5	0,65
6	0,60
7	0,85
8	0,80
9	0,75
10	0,70
11	0,80
12	0,75

13	0,85
14	0,75
15	0,70
16	0,50
17	0,70
18	0,80

РАЗДЕЛ 4. ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИКУМУ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Раздел 1.Введение. Элементы комбинаторики

1. В соревновании участвуют 8 команд. Сколько существует вариантов распределения мест между ними?

2. К полуфинальному этапу турнира допущены 8 команд: 1,2,3,4,5,6,7,8. В финал (на равных основаниях) попадают лишь три из них. Сколькими способами могут определиться участники финала?

3. Пусть по-прежнему соревнуются 8 команд, но не в полуфинале, как в задаче 2 , а в финале, где разыгрываются три медали: золотая, серебряная и бронзовая. Сколькими способами могут быть распределены медали?

4. Сколькими способами можно расположить шесть разных книг на одной полке?

5. Алхимик использует семь ингредиентов для приготовления эликсира жизни. Сколько существует различных порядков вливания их в сосуд?

6. Из цифр 1,2,3,4,5 составляются всевозможные пятизначные числа без повторяющихся цифр.
а). Сколько всего получится таких чисел?
б). Сколько среди них будет начинаться с цифры 5?
в). Сколько чисел будет оканчиваться комбинацией 41?
г). Сколько получится четных и сколько нечетных чисел?
д). Сколько получится чисел, кратных 3?

7. Из отряда солдат в 50 человек назначаются в караул 4 человека. Сколькими способами это можно сделать? Сколько среди них таких, что в число караульных попадет рядовой Иванов?

8. На прямой отмечены 5 точек: A, B, C, D, E. Сколько отрезков определяют эти точки?

Раздел 2. Основы теории вероятностей

9. Статистические данные свидетельствуют, что при вложении капитала размером в 100 тыс. у.д.е в строительство прибыль была получена в 18 случаях из 90. Какова вероятность получения прибыли от вложения 100 тыс. у.д.е. в строительство?

10. На территории предприятия произошла авария водопровода. Общая длина водопровода L = 150 м. В том числе 50 м трубы (l) приходится на труднодоступные места. Какова вероятность того, что ремонт придется производить именно на труднодоступном участке?

11. В магазин поступило 30 холодильников, пять из них имеют заводской дефект. Случайным образом выбирается один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

12. В коробке находится шесть одинаковых по форме и близких по диаметру сверл. Случайным образом сверла извлекаются из коробки. Какова вероятность того, что сверла извлекутся в порядке возрастания их диаметра?

13. Комиссия по качеству раз в месяц проверяет качество продуктов в двух из 30 магазинов, среди которых находятся и два известных вам магазина. Какова вероятность того, что в течение месяца они оба будут проверены?

14. На станцию прибыли 10 вагонов разной продукции. Вагоны помечены номерами от одного до десяти. Найти вероятность того, что среди пяти выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5?

15. Изготовлена партия из 200 изделий, в которых оказалось три бракованных. Произведена выборка из пяти изделий. Найти вероятность следующих событий:
а) в выборке не будет ни одного бракованного изделия;
б) в выборке будет одно бракованное изделие.

16. Из 20 акционерных обществ (АО) четыре являются банкротами. Гражданин приобрел по одной акции шести АО. Какова вероятность того, что среди купленных акций две окажутся акциями банкротов?

17. Из 100 изготовленных деталей 10 имеют дефект. Для проверки были отобраны пять деталей. Какова вероятность того, что среди отобранных деталей две окажутся бракованными?

18. На склад привезли 50 ящиков Комплектующих изделий для одного из видов ЭВМ, но среди них оказалось четыре ящика комплектующих для другого вида ЭВМ. Наудачу взяли шесть ящиков. Найти вероятность того, что в одном из этих шести ящиков окажутся некомплектные детали.

19. В партии из 15 однотипных стиральных машин пять машин изготовлены на заводе A, а 10 – на заводе B. Случайным образом отобрано 5 машин. Найти вероятность того, что две из них изготовлены на заводе A.

20. Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии, $P_и=0,4$, а того, что он произведен в Турции, $P_т = 0,3$. Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран: или в Италии, или в Турции?

21. В денежно-вещевой лотерее на серию в 10000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Найти вероятности:
а)получить денежный выигрыш;
б) получить вещевой выигрыш;
в) получить выигрыш вообще;
г) ничего не выиграть.

22. Вероятность своевременного получения груза $P_{сп}=0,8$, а вероятность того, что упаковка груза не будет повреждена, $P_{уп} = 0,7$.Какова вероятность того, что груз будет получен вовремя в неповрежденной упаковке?

23. На полке находится 10 книг, расставленных в произвольном порядке. Из них три книги по теории вероятностей, три – по менеджменту и четыре – по строительным материалам. Студент случайным образом достает одну книгу. Какова вероятность того, что он возьмет книгу по теории вероятностей или по строительным материалам?

24. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада?

25. В порт приходят корабли только из трех пунктов отправления. Вероятность появления корабля из первого пункта равна 0,2, из второго пункта – 0,6. Найти вероятность прибытия корабля из третьего пункта.

26. Контролер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия стандарту изделий равна 0,9.

а) Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий оба будут стандартными, если события появления стандартных изделий независимы?

б) Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное?

27. Вероятность правильного оформления счета на предприятии составляет 0,95. Во время аудиторской проверки были взяты два счета. Какова вероятность того, что только один из них оформлен правильно?

28. Вероятность правильного оформления накладной при передаче продукции равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех накладных только две оформлены правильно.

29. В районе 100 поселков. В пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два поселка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката?

30. В городе находятся 15 продовольственных и 5 непродовольственных магазинов. Случайным образом для приватизации были отобраны три магазина. Найти вероятность того, что все эти магазины непродовольственные.

31. В магазине имеются 10 женских и 6 мужских шуб. Для анализа качества отобрали три шубы случайным образом. Определить вероятность того, что среди отобранных шуб окажутся:

а) только женские шубы;

б) только мужские или только женские шубы.

32. На предприятие поступают заявки от нескольких торговых пунктов. Вероятности поступления заявок от пунктов А и В равны соответственно 0,5 и 0,4. Найти вероятность поступления заявок от пункта А или пункта В, считая события поступления заявок от этих пунктов независимыми, но совместными.

33. Предприятие обеспечивает регулярный выпуск продукции при безотказной поставке комплектующих от двух смежников. Вероятность отказа в поставке продукции от первого из смежников равна 0,05, от второго – 0,08. найти вероятность сбоя в работе предприятия.

34. Вероятности своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием.

35. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго – 6 и от третьего – 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Какова вероятность того, что:

а) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока;

б) проработавший без дефекта двигатель изготовлен на первом заводе, на втором заводе?

36. На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25, второй 35, третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5, 4 и 2%.

а) Найти вероятность того, что случайно выбранный замок является дефектным;

б) Случайно выбранный замок является дефектным.

в) Какова вероятность того, что он был изготовлен на первом, втором, третьем цехе?

37. Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй – 35, третий – 25. Вероятность брака у первого рабочего 0,03, у второго – 0,02, у третьего – 0,01. взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие сделал второй рабочий.

38. На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем ¾ продукции с процентом брака 4%, вторая – ¼ продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие:

а) окажется бракованным;

б) изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

39. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что это

а) сапоги; б) туфли?

40. В результате обследования были выделены семьи, имеющие по четыре ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней:

а) одного мальчика;

б) двух мальчиков.

41. Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуется холодильник марки «А», равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется:

а) не менее чем двум покупателям;

б) не более чем трем покупателям;

в) всем четырем покупателям.

42. Работают четыре магазина по продаже стиральных машин. Вероятность отказа покупателю в магазинах равна 0,1. Считая, что ассортимент товара в каждом магазине формируется независимо от других, определить вероятность того, что покупатель получит отказ в двух, трех, четырех магазинах.

43. В новом микрорайоне поставлено 10 000 кодовых замков на дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна

а) 0,0002;

б) 0,001.

Найти вероятность того, что за месяц откажут два, три и пять замков.

44. Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено:
а) ровно три изделия;
б) более трех изделий.

45. На станциях отправления поездов находится 1000 автоматов для продажи билетов. Вероятность выхода из строя одного автомата в течение часа равна 0,004. Какова вероятность того, что в течение часа выйдут из строя два, три, пять автоматов?

46. Всхожесть семян огурцов равна 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех?

47. Обувной магазин продал 200 пар обуви. Вероятность того, что в магазин будет возвращена бракованная пара, равна 0,01. Найти вероятность того, что из проданных пар обуви будет возвращено:
а) ровно 4 пары,
б) ровно 5 пар.

48. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

49. Найти вероятность того, что событие В наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

50. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

51. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна p=0,8. Найти вероятность того, что событие появится:
а) не менее 75 раз и не более 90 раз;
б) не менее 75 раз;
в) не более 74 раз.

52. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз?

Раздел 3. Дискретные случайные величины (ДСВ)

53. В партии из восьми деталей пять стандартных. Наудачу взяты четыре детали. Построить ряд распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

54. Среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билета с выигрышем. Наудачу покупают 2 билета. Написать закон распределения вероятностей числа выигрышных билетов среди купленных.

55. В партии из 25 кожаных курток 5 имеют скрытый дефект. Покупают 3 куртки. Найти закон распределения числа дефектных курток среди купленных. Построить многоугольник распределения.

56. Из партии в 20 изделий, среди которых имеется 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных изделий среди отобранных.

57. В коробке 20 одинаковых катушек ниток, из них 4 катушки с белыми нитками. Наудачу вынимают 2 катушки. Найти закон распределения числа катушек с белыми нитками среди вынутых.

58. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Построить ряд распределения числа попаданий мяча в корзину.

59. Имеются три базы с независимым снабжением. Вероятность отсутствия на базе нужного товара равна 0,1. Предприниматель решил закупить некий товар. Составить закон распределения числа баз, на которых в данный момент этот товар отсутствует.

60. Бросают три игральных кубика. Составить закон распределения числа выпавших «шестерок» на трех кубиках. Построить многоугольник распределения.

61. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента 0,15. Составить закон распределения отказавших элементов.

62. Вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0,3. Аудитору на заключение представлено 3 баланса предприятия. Составить закон распределения числа положительных заключений на проверяемые балансы.

63. Вероятность того, что аудитор допустит ошибку при проверке бухгалтерского баланса, равна 0,05. Аудитору на заключение представлено 2 баланса. Составить закон распределения числа правильных заключений на проверяемые балансы.

64. Вероятность сбоя в работе АТС равна 0,1. Составить закон распределения числа сбоев, если в данный момент поступило 5 вызовов.

65. Имеется 4 различных ключа, из которых только один подходит к замку. Составить закон распределения числа опробованных ключей, если опробованный ключ в дальнейшем не участвует в испытаниях.

66. В магазин привезли арбузы из Ташкента и Камышина в равных количествах. Вероятность покупки неспелого арбуза равна соответственно 0,1 и 0,3. Куплено 4 арбуза. Составить закон распределения спелых арбузов среди купленных.

67. У продавца имеются изделия, полученные в равных количествах с трех фабрик. Вероятность того, что эти изделия отличного качества, для каждой фабрики соответственно составляет 0,8; 0,7 и 0,9. Отобрано 2 изделия. Составить закон распределения количества изделий отличного качества среди отобранных.

68. Два покупателя независимо друг от друга делают по одной покупке. Вероятность того, что покупку сделает первый покупатель, равна 0,8, а вероятность того, что второй— 0,6. Случайная величина X — число покупок, сделанных покупателями. Описать закон распределения случайной величины X.

69. В лотерее из 100 билетов разыгрываются два выигрыша на сумму 200 руб. и 60 руб. Стоимость билета

10 руб.Составить закон распределения суммы чистого выигрыша для лица, купившего два билета.

70. В лотерее 100 билетов, из которых 2 выигрышных по 50 руб. и 10 выигрышных по 1 руб. Стоимость билета 2 руб. Составить закон распределения суммы чистого выигрыша для лица, купившего 2 билета. Построить многоугольник распределения.

71. Партия содержит 20 телевизоров, среди которых шесть с дефектом. Купили два телевизора. Составить ряд распределения исправных телевизоров среди купленных.

72. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

X	-5	2	3	4
p	0,3	0,4	0,2	O,1

Построить функцию распределения. Вычислить P(X<=3,5) и P (|X|<2,5).

73. Два покупателя независимо друг от друга делают по одной покупке. Вероятность того, что покупку сделает первый покупатель, равна 0,6, а вероятность того, что второй — 0,8. Случайная величина X — число покупок, сделанных покупателями. Найти функцию распределения случайной величины X.

74. Дискретная величина X задана законом распределения:

X	1	3	5
P	0,4	0,1	0,5

Найти закон распределения случайной величины Y=3*X .

75. Дискретная величина X задана законом распределения:

X	3	6	10
P	0,2	0,1	0,7

Найти закон распределения случайной величины Y=2*X+ 1

76. Дискретная величина X задана законом распределения:

X	-1	-2	1	2
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Найти закон распределения случайной величины Y = X2.

77. Дискретная величина X задана законом распределения:

X	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
P	0,2	0,7	0,1

Найти закон распределения СВ Y = sin X.

78. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы распределениями:

X	1	3
P	0,3	0,7

Y	2	4
P	0,6	0,4

Найти распределение случайной величины Z =X+ Y

79. ДСВ X и Y заданы распределениями:

X	10	12	16
P	0,4	0,1	0,5

Y	1	2
P	0,2	0,8

Найти распределение случайной величины Z = X +Y

80. ДСВ X и Y заданы распределениями:

Найти распределение случайной величины Z = X +Y

81. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X	2	4	6	8
p	0,4	0,2	0,1	0,3

Y	0	1	2
P	0,5	0,2	0,3

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z = 2X + 3Y.

82. Два консервных завода поставляют продукцию в магазин в пропорции 2:3. Доля продукции высшего качества на первом заводе составляет 90% , а на втором — 80% . В магазине куплено 3 банки консервов. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа банок с продукцией высшего качества.

83. Задан ряд распределения:

X	2	3	5	6	7	10
p	0,40	0,20	0,20	0,05	0,10	0,05

Найти M(X), σ (X) и M(2X^2 + 3).

84. Даны законы распределения независимых случайных величин:

X	-4	0	4
p	0.1	0.5	0.4

Y	2	4
p	0.5	0.5

Найти M(Z) и D(Z), если Z = (X + Y)/2.

85. Два товароведа проверяют партию изделий. Производительность их труда соотносится как 5:4. Вероятность определения брака первым товароведом составляет 85%, вторым — 90%. Из проверенных изделий отбирают четыре. Найти

а) математическое ожидание и

б) дисперсию числа годных изделий среди отобранных.

86. В магазин поступили электролампы с трех заводов в пропорции 2:3:5. Доля брака в продукции первого завода 5%, второго— 2%, третьего— 3%. Покупатель приобрел 3 лампочки. Найти

а) математическое ожидание и

б) среднее квадратичное отклонение числа качественных лампочек среди купленных.

87. Стороны прямоугольного участка X и Y в результате погрешностей измерения оказываются случайными величинами с такими распределениями:

X	19,5	19,7	20,0	20,2
p	0,20	0,05	0,70	0,05

Y	29,5	29,8	30,0	30,1
P	0,15	0,15	0,65	0,005

Найти математическое ожидание площади участка, если известно, что измерения проводились независимыми способами.

88. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,015. Сделано 600 выстрелов. Какова вероятность того, что число попаданий в цель не меньше 7 и не больше 10?

89. Автоматическая линия при нормальной настройке выпускает бракованное изделие с

X	4	10
P	0,7	0,3

Y	1	7
P	0,8	0,2

вероятностью 0,001. переналадка линии проводится после выпуска каждого бракованного изделия. а) Чему равно среднее число изделий, выпускаемых между двумя последовательными переналадками линии? б) Какова вероятность того, что между соседними переналадками линии выпускается ровно 1000 изделий?

90. Вероятность обнаружения малоразмерного объекта в заданном районе в отдельном полете равна 1/3. а) Сколько в среднем полетов придется совершить, прежде чем объект будет обнаружен? б) Какова вероятность того, что для обнаружения объекта придется совершить не менее трех вылетов?

91. При одном выстреле стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,7. Ему разрешается стрелять до трех промахов. а) Найти среднее число израсходованных стрелком патронов. б) Определить вероятность того, что стрелок израсходует ровно восемь патронов.

92. Сколько в среднем раз понадобится подбрасывать игральную кость до тех пор, пока хотя бы по одному разу не выпадет каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

93. Сколько в среднем подбрасываний монеты придется произвести до тех пор, пока хотя бы по одному разу не выпадет и герб, и решка?

Раздел 4.Непрерывные случайные величины (НСВ)

94. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2, \\ (x-2)2, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности f(x) и вероятность попадания случайной величины X в интервалы (1; 2,5), (2,5; 3,5).

95. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1, \\ (x - 1/2), & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 0, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

96. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ ½ \sin x, & \text{если } 0 < x \le \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить график.

97. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1, \\ 1/3\,(x - 1/2), & \text{если } 1 < x \le 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить график.

98. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 < x \le \pi/2 \\ 1, & \text{если } x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить график.

99. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \cos x, & \text{если } 0 < x \le \pi/2 \\ 1, & \text{если } x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить график.

100. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задана в виде f(x) = 2C/(1 + x2). Найти параметр C.

101. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задана в интервале (0; π/4) функцией f(x) = C sin 4x.Вне этого интервала f(x) = 0. Найти параметр C.

102. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задана в интервале (- π/2; π/2) функцией f(x) = C cos x. Вне этого интервала f(x) = 0. Найти параметр C и определить вероятность попадания случайной величины X в интервал (0; π/4).

103. Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = x/2 в интервале (0; 2), вне этого интервала f(x) = 0. Найти математическое ожидание величины X

104. Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = x/8 в интервале (0; 4). Вне этого интервала f(x) = 0. Найти математическое ожидание.

105. Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = C(x^2 + 2x) в интервале (0; 1). Вне этого интервала f(x) = 0. Найти параметр C.

106. Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = a/(1 + x^2) при $-\infty < x < \infty$. Определить параметр a и математическое ожидание.

107. Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = - ¾ x2 + 6 *x – 45/4 — на интервале (3; 5). Вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду, медиану и математическое ожидание.

Указание. Для нахождения моды можно использовать необходимое и достаточные условия экстремума функции. Для нахождения медианы нужно учесть симметричность параболы относительно ее оси.

108. Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = - ¾ x2 + 9/2 *x - 6 в интервале (2; 4). Вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду, медиану и математическое ожидание.

109. Случайная величина X задана в интервале (0; π) плотностью вероятности f(x) = ½ sin x, вне этого интервала f(x) = 0. Найти дисперсию величины X.

110. Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = 0,25 sin (x/2) на интервале (0; 2π). Вне этого интервала f(x) = 0. Найти дисперсию величины X.

111. Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = 0,5 cos x на интервале (- π /2; π /2). Вне этого интервала f(x) = 0. Найти дисперсию величины X.

112. Найти математическое ожидание случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ x/4, \text{ если } 0 < x \le 4, \\ 1, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

113. Найти математическое ожидание случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le -1, \\ 3x, \text{ если } -1 < x \le 3, \\ 1, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

114. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [1; 6]. Найти функцию распределения F(x), математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение величины.

115. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [0; 4]. Найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение величины X.

116. Автобусы подходят к остановке с интервалом в 5 мин. Считая, что случайная величина X — время ожидания автобуса — распределена равномерно, найти среднее время ожидания (математическое ожидание) и среднее квадратичное отклонение случайной величины.

117. Для условия предыдущей задачи найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

118. Паром для перевозки автомашин через залив подходит к причалу через каждые два часа. Считая, что время прибытия автомашин — случайная величина X — распределено равномерно, определить среднее время ожидания автомашиной прихода парома и дисперсию времени ожидания.

119. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания амперметра округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

120. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

121. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20с.

122. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно Mx =5, дисперсия равна Dx = 9. Написать выражение для плотности вероятности.

123. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 12 и 2. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (14; 16).

124. Имеется случайная величина X, распределенная по нормальному закону, математическое ожидание которой равно 20, среднее квадратичное отклонение равно 3. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью p = 0,9972 попадет случайная величина.

125. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 15, и средним квадратичным отклонением, равным 2. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,954 попадет случайная величина.

126. Известно, что средний расход удобрений на один гектар пашни составляет 80 кг, а среднее квадратичное отклонение расхода равно 5 кг. Считая расход удобрений нормально распределенной случайной величиной, определить диапазон, в который вносимая доза удобрений попадает с вероятностью 0,98.

127. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины — количества сыра, используемого для изготовления 100 бутербродов, — равно 1 кг. Известно, что с вероятностью 0,96 расход сыра на изготовление 100 бутербродов составляет от 900 до 1100 г. Определить среднее квадратичное отклонение расхода сыра на 100 бутербродов.

128. При измерении нормально распределенной случайной величины оказалось, что ее среднее квадратичное отклонение равно 10, а вероятность попадания этой величины в интервал от 100 до 140, симметричный относительно математического ожидания, равна 0,86. Найти математическое ожидание этой величины и вероятность попадания ее в интервал от 90 до 150.

129. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$\begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 1-e^{-0,1x}, \text{ если } x > 0 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

130. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$\begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 1-e^{-0,4x}, \text{ если } x > 0 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение СВ X.

131. Найти вероятность попадания случайной величины t, имеющей показательное распределение

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \le 0, \\ 0,2e^{-0,2t}, \text{ если } t > 0, \end{cases}$$

в интервал (4; 10).

132. Найти вероятность попадания случайной величины X с показательным распределением, приведенным в задаче 130, в интервал (2; 5).

Раздел 5 Центральная предельная теорема. Закон больших чисел. Вероятность и частота

133. В предположении, что один шаг пешехода распределен равномерно в пределах от 70 см до 80 см, и размеры шагов независимы, оценить вероятность того, что за 10 000 шагов пройденный пешеходом путь составит 7,5 км $\pm$ 50 м.

134. При составлении статистического отчета надо сложить 10 000 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10 -3. считая, что ошибки округления независимы и распределены равномерно в интервале (-0,5*10-3; 0,5 * 10-3), оцените наименьший по длине промежуток, в котором с вероятностью 0,95 будет заключена суммарная ошибка.

Раздел 6 Выборочный метод. Статистические оценки параметров распределения

135. В урне a белых и h черных шаров. Шары отличаются только цветом. Из урны наугад вынули два шара. Найдем вероятности двух событий: A1-- первый шар белый, A2 —второй шар также белый — для следующих двух случаев: выборка с возвратом и выборка без возврата.

136. На телефонной станции проводились наблюдения над числом X неправильных соединений в минуту. Наблюдения в течение часа дали следующие результаты: 3; 1; 3; 1; 4; 2; 2; 4; 0; 3; 0; 2; 2; 0; 2; 1; 4; 3; 3; 1; 4; 2; 2; 1; 1; 2; 1; 0; 3; 4; 1; 3; 2; 7; 2; 0; 0; 1; 3; 3; 1; 2; 4; 2; 0; 2; 3; 1; 2; 5; 1; 1; 0; 1; 1; 2; 2; 1; 1; 5. Выполнить ранжирование, варьирование и построить вариационный ряд.

137. При измерении диаметра валиков после шлифовки получены следующие результаты(см. табл): Построить вариационный ряд.

6,75	6,77;	6,77;	6,73;	6,76;	6,74;	6,70;	6,75;	6,71;	6,72;	6,77;	6,79;	6,71;	678;
673	6,70;	673-	6,77;	675-	6,74;	6,71-	6,70;	6,78;	6,76-	6,81;	6,69-	680-	680-
6,77;	**6,68;**	6,74;	6,70;	6,70;	6,74;	6,77;	**6,83**;	6,76;	6,76;	6,82;	6,77;	6,71;	6,74;
6,77;	6,75;	6,74;	6,75;	6,77;	6,72;	6,74;	6,80;	6,75;	6,80;	6,72;	6,78;	6,70;	6,75;
6,78	6,78;	6,76-	6,77;	6,74	6,74;	6,77-	6,73;	674-	6,77-	674-	6,75	674-	676-
6,76-	6,74;	6,74-	6,74;	6,74	6,76;	6,74-	6,77-	6,80;	6,76-	678-	6,73-	670-	676-
6,76;	6,77;	6,75;	6,78;	6,72;	6,76;	6,78;	6,68;	6,75;	6,73;	6,82;	6,73;	6,80;	681;
6,71;	6,82;	6,77;	6.80;	6,80;	6,70;	6,70;	6,82;	6,72;	6,69;	6,73;	6,76;	6,74;	6,77;
6 ,72	6,76;	6,78-	6,78;	6,73	6,76;	680-	6,76;	6,72;	6,76-	6,76;	6,70-	673-	675-
6 ,77	6,77;	6,70-	6,81;	6,74	6,73;	677-	6,74;	6,78;	6,69-	674-	6,71-	676-	676-
6,77;	6,70;	6,81-	6,74;	6,74	6,77;	67V	6,80;	6,74;	6,76-	6,77;	6,77-	681-	67*
678-	6,73	6,76-	6,76;	6,76	6,77;	676-	6,80;	677-	6,74-	677-	6,77-	675-	676-
677-	6,81;	6,76-	6,76;	6,76	6,80;	674-	680-	6,74;	6,73-	675-	6,77-	674-	676-
6,77;	6,77;	6,75;	6,76;	6,74;	6,82;	6,76;	6,73;	6,74;	6,75;	6,76;	6,72;	6,78;	6,72;
6,76	6,77-	6,75	6,78										

138. Построить выборочную функцию распределения по данным задачи 136.

139. Используя данные задачи 137, построить выборочную функцию распределения.

140. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

X_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

141. Построить полигон частот по данному распределению выборки

а)

X_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

б)

X_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

142. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема n = 100

Номер интервала i	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты n_i/h
1	1 – 5	10	2,5
2	5 – 9	20	5
3	9 – 13	50	12,5
4	13 – 17	12	3
5	17 - 21	8	2

143. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки

Номер интервала i	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты n_i/h
1	2 – 7	5	
2	7 – 12	10	
3	12 – 17	25	
4	17 – 22	6	
5	22 - 27	4	

РАЗДЕЛ 5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОМУ ПРАКТИКУМУ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН 03 Теория вероятностей и математическая статистика

Статистические расчеты без помощи ЭВМ являются сложными и требуют применения многочисленных таблиц функций и квантилей стандартных распределений. Поэтому они не дают возможности почувствовать элемент новизны в изучаемом материале, изменять произвольно условия задач и т.д. Специализированные математические пакеты не могут использоваться для обучения, т.к. их использование требует достаточно высокого уровня подготовки в математической статистике. Поэтому в данных указаниях предлагается использовать универсальные математические пакеты Maple 6, Mathematica 3, Matlab 5.3 и Mathcad 7 Professional.

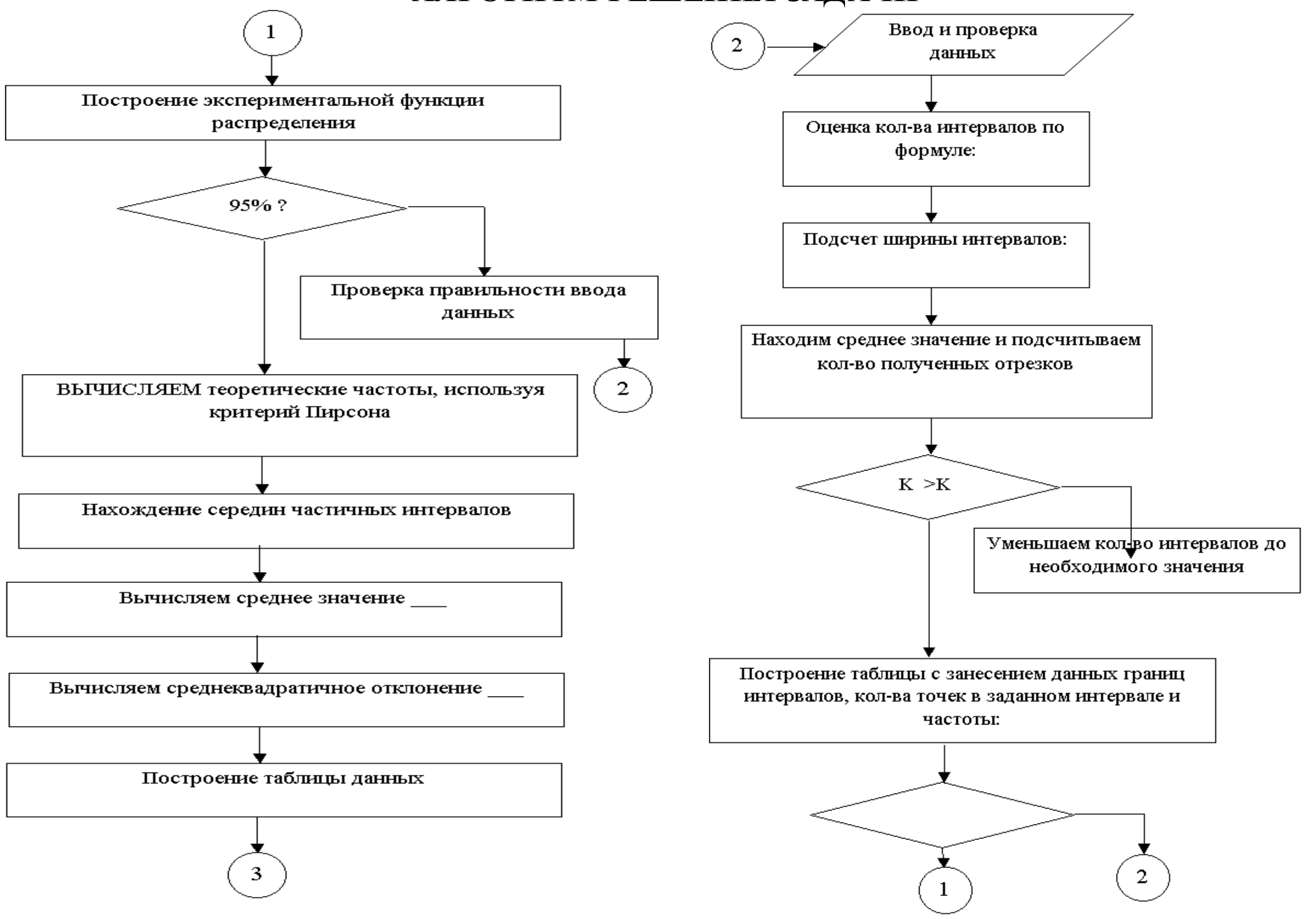
Весь материал разбит на пять лабораторных работ. На каждом занятии студент получает индивидуальное задание, которое выполняет самостоятельно под руководством преподавателя. В конце каждой лабораторной работы приведены варианты заданий, контрольные вопросы и примеры, демонстрирующие способы решения поставленных задач с помощью математических пакетов.

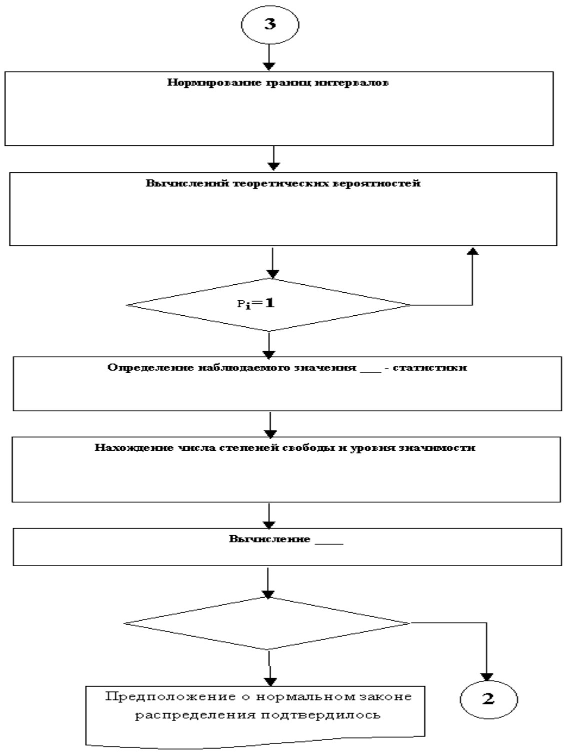
Таким образом, методические указания позволяют, во-первых, интенсифицировать практическую составляющую обучения математической статистике и, во-вторых, обучить студентов навыкам использования основных универсальных математических пакетов.

Преподаватель может организовать выполнение лабораторных работ следующим образом: первые три работы – на математическом пакете Maple, оставшиеся лабораторные работы – на других пакетах; либо все работы – на каком-либо одном математическом пакете. При этом, даже в последнем случае студенты получат навыки работы со всеми пакетами, так как решение задачи подробно разбирается только на одном математическом пакете, для каждой лабораторной – своём.

Методические указания могут также быть использованы для проведения практики по теории вероятностей и статистике параллельно – первую на практических занятиях, а вторую на лабораторных, поскольку применение математических пакетов значительно сократит время на решение задач статистики. С этой целью в указаниях приводятся необходимые теоретические сведения по математической статистике.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ





1. Правила работы в лаборатории

1.1 В начале семестра староста группы распределяет студентов на 2 подгруппы и представляет список преподавателю, ведущему лабораторный практикум.

1.2 Перед началом первого занятия студенты обязаны изучить правила техники безопасности для данной лаборатории и расписаться в журнале.

1.3 Для занятий в лаборатории необходимо иметь настоящие методические указания к лабораторным работам.

1.4 Накануне дня выполнения лабораторной работы студент должен:

- ознакомиться по настоящему пособию с целью и содержанием работы;
- заготовить в рабочей тетради или с использованием компьютера бланк протокола с необходимыми таблицами в соответствии с требованиями, изложенными в описании каждой работы;
- подготовиться к ответам на вопросы, перечень которых приведен в начале описания каждой работы.

1.5 Перед проведением работ необходимо, если это требуется по заданию, изучить дополнительные методические указания по работе с лабораторным оборудованием, ознакомиться с прилагаемым к нему техническим описанием и правилами эксплуатации.

1.6 Выполнять лабораторную работу нужно в порядке, изложенном в данных методических указаниях. Расчеты и полученные экспериментальные результаты по каждому пункту каждый студент фиксирует в собственном бланке протокола и предъявляет преподавателю для проверки.

1.7 Для разрешения возникающих в процессе выполнения работы проблем следует обращаться к преподавателю.

1.8 Для ведения протоколов и оформления отчетов по лабораторным работам каждый студент должен иметь личную рабочую тетрадь. Если оформление отчетов будет производиться с использованием компьютера, то необходимо иметь носители информации в электронном виде.

1.9 По результатам выполнения всех пунктов работы нужно оформить и защитить отчет. Защита отчета удостоверяется подписью преподавателя и сопровождается выставлением оценки.

1.10 Перед уходом из лаборатории студент должен привести рабочее место в порядок: выключить приборы, убрать соединительные провода.

2. Правила техники безопасности при выполнении работ

2.1 *Общие положения*

2.1.1 В дисплейных классах установлена дорогостоящая, сложная и требующая аккуратного обращения аппаратура (компьютеры, принтеры и другие технические средства), поэтому следует бережно обращаться с этой техникой.

2.1.2 Дисплей работает электронно-лучевая трубка, которая находится под высоким напряжением. Нарушение правил электробезопасности может привести к тяжелым поражениям электрическим током, вызвать загорание аппаратуры, что может повлечь за собой ожоги различной степени.

2.1.3 При работе за дисплеем пользователи подвергаются воздействию вредных и опасных факторов производственной среды: электромагнитных полей, статическому электричеству. При длительной работе за экраном дисплея отмечается выраженное напряжение зрительного аппарата с появлением жалоб: головные боли, раздражительность, нарушение сна, усталость и болезненные ощущения в глазах, в пояснице, в области шеи, руках и др.

2.1.4 К выполнению работ за дисплеем допускаются пользователи, прошедшие инструктаж по технике безопасности, инструктаж по эксплуатации оборудования на рабочем месте и умеющие оказать первую помощь пострадавшим. Инструктаж по технике безопасности проводится периодически, не реже 2-х раз в год.

2.1.5 Студенты обязаны знать и точно выполнять указания по технике безопасности, приведенные в описаниях выполняемых работ.

. 2.2 *Требования безопасности перед началом работы в дисплейном классе*.

2.2.1 Перед началом работы следует убедиться в отсутствии видимых повреждений аппаратуры и рабочего места. Средства вычислительной техники должны находиться на столах в устойчивом положении. В дисплейном классе должны быть предусмотрены меры пожарной безопасности.

2.2.2 Студентам при работе в дисплейном классе разрешается работать только за пультом, категорически запрещается проникать внутрь устройств. Включать устройства можно только по разрешению преподавателя, дежурного персонала.

2.3 *Требования безопасности во время работы в дисплейном классе*.

2.3.1 На ПЭВМ разрешается работать только при закрытых крышках устройств.

2.3.2 Во избежание случаев электрического замыкания и возникновения пожаров во время работы на рабочем месте не должно быть легковоспламеняющихся веществ, посторонних предметов.

2.3.3 Необходимо соблюдать оптимальное расстояние глаз до экрана монитора (60-70 см), допустимое расстояние не менее 50см. Сокращение расстояния глаз до экрана приводит к быстрому развитию утомления зрительного анализатора.

2.3.4 Длительность работы на видеотерминалах в течении дня не должна превышать 3-4 часов. 2.3.6 Не разрешается:

- трогать разъемы соединительных кабелей;
- класть диски, сумки, книги, тетради на монитор и клавиатуру;
- находиться в помещении, где установлена компьютерная техника в пальто, плащах и головных уборах;
- курить, сорить в помещении дисплейного класса.

2.3.7 Работать на клавиатуре следует только чистыми руками, не допускать резких ударов.

2.4 *Требования безопасности в аварийных ситуациях*.

2.4.1 При обнаружения искрения и при появлении запаха гари следует немедленно прекратить работу, выключить аппаратуру, сообщить об этом преподавателю или дежурному персоналу.

2.4.2 Для полного и быстрого обеспечения отключения оборудования необходимо выключить автомат расположенный на стене комнаты.

2.4.3 При обнаружении искрения в местах соединения проводов работы необходимо немедленно прекратить и доложить преподавателю либо дежурному персоналу.

2.4.4 О всех неполадках, обнаруженных в оборудовании сообщить преподавателю или дежурному инженеру.

2.4.5 При несчастном случае (поражении электротоком) необходимо:

- немедленно снять напряжение выключателем (на стене комнаты);
- сообщить руководителю или дежурному персоналу;
- приступить к оказанию первой помощи;
- вызвать врача.

2.4.6 При пожаре необходимо:

- немедленно выключить напряжение выключателем (на стене комнаты);
- сообщить руководителю или дежурному персоналу;
- приступить к тушению пожара огнетушителем;
- вызвать пожарную охрану (тел 01).

2.5 Требования безопасности по окончанию работы.

2.5.1 Необходимо привести рабочее место в порядок.

2.5.2 Об окончании работы доложить преподавателю или дежурному персоналу класса.

РАЗДЕЛ 6.КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН 03 Теория вероятностей и математическая статистика

6.1. Текущий и рубежный контроль

Варианты заданий для проверки знаний по разделу «Предельные теоремы теории вероятностей

1 вариант.

1. Раскройте понятие НСВ, их характеристики
2. Нормальное распределение.
3. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [12; 16]. Найти функцию распределения F(x), математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение величины.
4. Найти вероятность попадания случайной величины t, имеющей показательное распределение

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \le 0, \\ 0{,}8e^{-0{,}8t}, & \text{если } t > 0, \end{cases}$$

в интервал (4; 10).

2 вариант

1. Перечислите свойства плотности распределения вероятностей НСВ
2. Показательное распределение.
3. Найти математическое ожидание случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1, \\ 33x, & \text{если } -1 < x \le 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

4. При измерении нормально распределенной случайной величины оказалось, что ее среднее квадратичное отклонение равно 10, а вероятность попадания этой величины в интервал от 80 до 160, симметричный относительно математического ожидания, равна 0,86. Найти математическое ожидание этой величины и вероятность попадания ее в интервал от 90 до 150.

3 вариант

1. Математическое ожидание и дисперсия.
2. Центральная предельная теорема.
3. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \tfrac{1}{2}\sin x, & \text{если } 0 < x \le \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить график.

4. Имеется случайная величина X, распределенная по нормальному закону, математическое ожидание которой равно 20, среднее квадратичное отклонение равно 5. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью p = 0,9972 попадет случайная величина.

4 вариант

1. Раскройте понятия моды и медианы.
2. Закон больших чисел.
3. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1, \\ 1/3(x - 1/2), & \text{если } 1 < x \le 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

4. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 4. Найти вероятность того, что случайная

величина примет значение, заключенное в интервале (15; 20).

5 вариант

1. Равномерное распределение.
2. Вероятность и частота.
3. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2, \\ (x-3)^8, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности f(x) и вероятность попадания случайной величины X в интервал (2,5; 3,5).

4. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины — количества масла, используемого для изготовления 200 бутербродов, — равно 1 кг. Известно, что с вероятностью 0,96 расход масла на изготовление 200 бутербродов составляет от 900 до 1100 г. Определить среднее квадратичное отклонение расхода масла на 200 бутербродов.

ТИПОВЫЕ ОТВЕТЫ:

1 вариант.

1. **Понятие НСВ, их характеристики** *Непрерывные случайные величины* характеризуются тем, что их значения могут сколь угодно мало отличаться друг от друга.

Вероятность события $X < x$ (где X — значение непрерывной случайной величины, а x — произвольно задаваемое значение), рассматриваемая как функция от x, называется *функцией распределения вероятностей*:

$$F(x) = P(X < x).$$

Производная от функции распределения вероятностей называется *функцией плотности распределения вероятностей* или плотностью вероятности:

$$f(x) = F'(x).$$

2. **Нормальное распределение**

Случайная величина X распределена по **нормальному закону**, если ее функция плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

где M_x — математическое ожидание; σ_x — среднее квадратичное отклонение.

Вероятность попадания случайной величины в интервал (a, b) находится по формуле $P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a-M_x}{\sigma_x}\right) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$ *где* $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ *— функция Лапласа.*

3.Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [12; 16]. Найти функцию распределения F(x), математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение величины.

Решение. Плотность вероятности для величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 12, \\ 1/4, \quad \text{если } 1 < x \le 16, \\ 0, \text{ если } x > 16. \end{cases}$$

Следовательно, функция распределения, вычисляемая по формуле

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, запишется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 12, \\ 1/4 \int_{1}^{x} f(x)dx = 1/4\ x\,|_1^x = \dfrac{x-1}{4}, \quad \text{если } 12 < x \le 16, \\ 1, \text{ если } x > 16. \end{cases}$$

Математическое ожидание будет равно Mx = (12 + 16)/2 = 14.

Находим дисперсию и среднее квадратичное отклонение: Dx = $(16 - 12)^2/12$ = 16/12, $\sigma_x = 2\sqrt{3}$.

4.Найти вероятность попадания случайной величины t, имеющей показательное распределение

$$f(t) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } t \le 0, \\ 0{,}8e^{-0{,}8t}, \text{ если } t > 0, \end{cases}$$

в интервал (4; 10).

Решение. Для решения задачи используем формуле: ***P*** $(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ **=** $\int_a^b f(x)dx$ **=** $\int_4^{10} 0{,}8e^{-0{,}8t}dt$ **=**

$$= -\int_4^{10} e^{-0{,}8t}d(-0.8t) = -e^{-0.8t}\Big|_4^{10} = -e^{-0.8*10} + e^{-0.8*4} = e^{-3{,}2} - e^{-8} \approx 0.414$$

<u>2 вариант</u>

1. Плотность распределения обладает следующими свойствами:

- Плотность распределения неотрицательна, т.е. ***f(x) >=0***
- Вероятность попадания случайной величины в интервал (x_1 , x_2) равна приращению функции распределения вероятностей на этом интервале:

$$P\ (x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = .\ \int_a^b f(x)dx$$

- Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ **= 1**
- В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то $\int_a^b f(x)dx$ **= 1**
- Функция распределения вероятностей выражается через плотность вероятности в виде интеграла: ***F (x) =*** $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

2. <u>*Показательное распределение*</u>

Распределение непрерывной случайной величины Х называется ***показательным (экспоненциальным)***, если плотность вероятности этой величины описывается функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

где λ — положительное число.

Соответственно, функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

Свойства:

- Вероятность попадания в интервал (a,b) непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону, P (a <X<b) = $e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение показательного распределения соответственно равны: Mx = 1/λ; DX = 1/λ^2 ; σ_x = 1/λ
- Таким образом, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.

3. Найти математическое ожидание случайной величины Х, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1, \\ 33x, & \text{если } -1 < x \le 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Решение. Плотность вероятности для величины Х имеет вид

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 33, & \text{если } -1 < x \le 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Следовательно, математическое ожидание, вычисляемое по формуле

$$M_x = \int_{-1}^{3} xf(x)dx = \int_{-1}^{3} x * f(x)dx = \int_{-1}^{3} x * 33dx = 33\int_{-1}^{3} x\,dx = \frac{33x^2}{2}\Big|_{-1}^{3} = 148{,}5 - 16{,}5 = 132$$

4. При измерении нормально распределенной случайной величины оказалось, что ее среднее квадратичное отклонение равно 10, а вероятность попадания этой величины в интервал от 80 до 160, симметричный относительно математического ожидания, равна 0,86. Найти математическое ожидание этой величины и вероятность попадания ее в интервал от 90 до 150.

Решение. учитывая симметричность отрезка, т.е. что a = Mx - α, а $b = Mx + \alpha$, получим: Mx = (80+160)/2 = 120. Так как P(a < X < b) = $\Phi\left(\frac{b - M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a - M_x}{\sigma_x}\right) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$,

то P(90 < X < 150) = $\Phi\left(\frac{150 - 120}{10}\right) - \Phi\left(\frac{90 - 120}{10}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2 * \Phi(3)$,

в силу нечетности функции Лапласа, т.е. P=2*Ф(3) = 2*0,49865 = 0,9973.

<u>***3 вариант***</u>

1. ***Средним значением*** или математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется значение интеграла M(X) = Mx = $\int_{-\infty}^{\infty}$ xf(x)dx, где f(x) — плотность вероятности.

Дисперсией непрерывной случайной величины *X* называется значение интеграла

$$\mathbf{D(X) = D_X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_x)^2 f(x)dx. = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx. - M_x^2}$$

2. ***Центральная предельная теорема.***

Группа теорем теории вероятностей, которые устанавливают связь между законом распределения суммы случайных величин и его предельной формой – нормальным законом распределения, называется *центральной предельной теоремой*. Различные формы центральной предельной теоремы отличаются между собой условиями, накладываемыми на сумму рассматриваемых случайных величин. Поскольку несложные условия на практике выполняются очень часто, нормальный закон является самым распространенным среди законов распределения, наиболее часто используемым при объяснении случайных явлений природы.

Теорема Ляпунова. Распределение суммы независимых случайных величин Xi, i = 1, 2, ... n, приближается к нормальному закону распределения при неограниченном увеличении n, если выполняются следующие условия:

3) *все величины имеют конечные математические ожидания и дисперсии;*
4) *2) ни одна из величин по своему значению резко не отличается от всех остальных, т.е. оказывает ничтожное влияние на их сумму.*

Теорема Ляпунова имеет большое практическое применение. На опыте было установлено, что распределение суммы независимых случайных величин, у которых дисперсии не отличаются резко друг от друга, довольно быстро приближается к нормальному. Уже при числе слагаемых, большем 10, распределение суммы можно заменить нормальным.

При решении многих практических задач, связанных со случайной величиной $\overline{X}$, являющейся средним арифметическим наблюдаемых значений случайной величины X, применяется теорема Ляпунова в следующей формулировке:

Теорема Ляпунова. Если случайная величина X имеет конечные математическое ожидание Mx и дисперсию Dx, то распределение среднего арифметического $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$, *вычисленного по наблюдавшимся значениям случайной величины в n независимых испытаниях, проведенных в одинаковых условиях, при* $n \to \infty$ *приближается к нормальному с математическим ожиданием Mx и дисперсией Dx/n, т.е.*

$$P(\overline{X} > x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x / n}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-M_x)^2}{2D_x / n}} dt$$

3. Случайная величина X имеет плотность вероятности

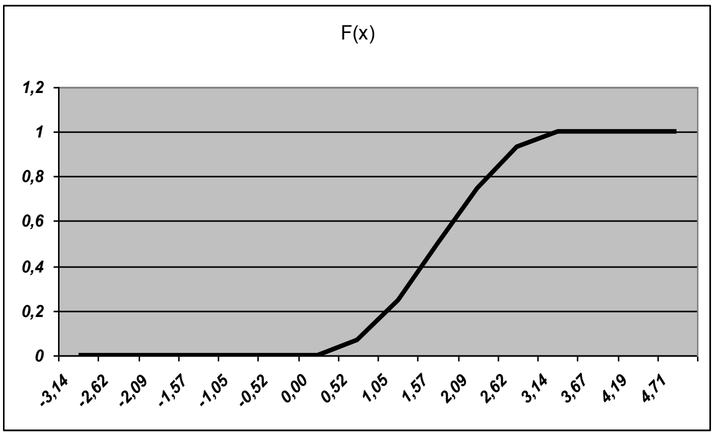
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \tfrac{1}{2}\sin x, & \text{если } 0 < x \le \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить график.

Решение: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$, если $x \le 0$

$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = 0 + 1/2\,(-\cos x)\,\big|_0^x = 1/2 - 1/2\cos x$, если $0 < x \le \pi$,

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + + \int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{x} f(x)dx = 0 + (1/2 - 1/2\cos x)\big|_0^{\pi} + 0 = 1$, если $x > \pi$



4.Имеется случайная величина X, распределенная по нормальному закону, математическое ожидание которой равно 20, среднее квадратичное отклонение равно 5. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью p = 0,9972 попадет случайная величина.

__Решение.__ Так как P(a < X < b) = $\Phi\left(\dfrac{b-M_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-M_x}{\sigma_x}\right)=\Phi(z_2)-\Phi(z_1)$, то, учитывая симметричность отрезка, т.е. что a = Mx - α, а $b = Mx+\alpha$, получим: P= $\Phi\left(\dfrac{M_x+\alpha-M_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\dfrac{M_x-\alpha-M_x}{\sigma_x}\right)=\Phi\left(\dfrac{\alpha}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\dfrac{-\alpha}{\sigma_x}\right)=2*\Phi\left(\dfrac{\alpha}{\sigma_x}\right)$ в силу нечетности функции Лапласа, т.е. P=2*Φ(α /5) = 0,9972 (по условию). Отсюда Φ(α /5) = 0,9972 / 2 = 0,4986. По таблице функции Лапласа находим значение (α /5), соответствующее полученному значению функции Φ(α /5) = 0,4986: α /5 = 2,99. Отсюда α = 5 * 2,98 = 14,9. Искомый интервал будет иметь вид (5,1; 34,9).

6.2. Итоговый контроль

Комплект контрольно-измерительных материалов
по учебной дисциплине ЕН 03«Теория вероятностей и математическая статистика»

1. Паспорт комплекта контрольно-измерительных материалов

1.1. Область применения

Комплект контрольно-измерительных материалов предназначен для проверки результатов освоения учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», которая является компонентом математического и общего естественнонаучного цикла по специальности 230115 Программирование в компьютерных системах (укрупнённая группа специальностей 230000 Информатика и вычислительная техника).

Комплект контрольно-измерительных материалов позволяет оценивать освоение умений и усвоение знаний:

Освоенные умения, усвоенные знания	***Основные показатели результатов подготовки***	***№№ заданий для проверки***
В результате освоения учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» обучающийся должен **уметь:**		
применять стандартные методы и модели к решению комбинаторных задач;	Модель задачи составлена в соответствии с методическими рекомендациями Задача решена с использованием соответствующего алгоритма, расчетные ошибки отсутствуют	В1 В2 В3
применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач;	Задача решена с использованием соответствующего алгоритма, расчетные ошибки отсутствуют	
В результате освоения учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» обучающийся должен **знать:**		
основные понятия комбинаторики;	Формулирует основные понятия комбинаторики Воспроизводит формулы для вычисления числа комбинаций для сочетаний размещений перестановок	А1
основы теории вероятностей	Формулирует основные понятия теории вероятностей Воспроизводит формулы для вычисления вероятностей : простых событий сложных событий	А2 А4-А5 А7-А8
	Воспроизводит формулы для вычисления характеристик случайных величин	А3, А6, А9
основы математической статистики	Формулирует основные понятия математической статистики	А10

1.2. Система контроля и оценки освоения программы УД

Система контроля и оценки освоения программы УД «Теория вероятностей и математическая статистика» соответствует Положению об итоговой и промежуточной аттестации в ГАОУ СПО СКСЭиП.

Организация контроля и оценки освоения программы УД

Освоение студентами курса учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» предполагается учебным планом в течение одного семестра.

Текущий контроль при освоении учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» осуществляется в ходе учебных (аудиторных) занятий в следующих формах:

- устные или письменные тематические опросы,
- самостоятельная работа студента (составление сравнительной (сводной) таблицы, реферирование)
- проверка выполнения домашних заданий (упражнений на закрепление материала, моделирование и решение вероятностных задач, аналитический обзор литературы определенной тематики)

Промежуточный контроль (аттестация) студентов осуществляется ежемесячно в рамках накопительной системы оценивания.

Рубежный контроль осуществляется в форме проверочно-итоговых занятий по разделам, предусмотренных рабочей программой.

Итоговый контроль освоения учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» осуществляется при проведении экзамена по окончании изучения дисциплины.

Оценка усвоенных знаний на экзамене осуществляется с помощью следующих форм заданий:

- ✓ с выбором правильного ответа из фиксированного набора вариантов,

Оценка освоенных умений на экзамене осуществляется с помощью следующих форм заданий:

- ✓ со свободным (развернутым) ответом

Условием допуска к экзамену по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» является положительная оценка промежуточной аттестации по учебной дисциплине.

В состав комплекта оценочных средств входят пакет для экзаменующихся и пакет экзаменатора (эксперта).

2. Комплект материалов для оценки сформированности умений и знаний

2.1. Пакет для экзаменующихся

Оцениваемые умения и знания:

- ✓ умение применять стандартные методы и модели к решению комбинаторных и вероятностных;
- ✓ знание основных понятий комбинаторики;
- ✓ знание основ теории вероятностей и математической статистики

Условия выполнения задания:

Вычислительная сложность заданий требует использования калькуляторов, поэтому в целях обеспечения равенства всех участников экзамена использование калькуляторов на экзамене допускается.

2.1.1. Инструкция для экзаменующихся

Последовательность и условия выполнения экзаменационного задания

Выберите номер варианта заданий согласно номеру в списке экзаменационной ведомости.

Работа состоит из 2 частей и включает 13 заданий.

Часть А включает 10 заданий (А1–А10), в которых необходимо выбрать правильный ответ из фиксированного набора вариантов.

Часть В содержит 3 задания по решению вероятностных задач. Задания В1–В3 требуют полного (развёрнутого) ответа.

Номера выбранных Вами правильных ответов и развёрнутые ответы переносятся в бланк ответов. Бланк ответов заполняется яркими чернилами, без исправлений. При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценке работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Использование информационно-справочных материалов: не предусмотрено.

Используемое оборудование:

Вычислительная сложность заданий требует использования калькуляторов, поэтому в целях обеспечения равенства всех участников экзамена использование калькуляторов на экзамене допускается.

Максимальное время выполнения задания.

На выполнение экзаменационных заданий по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» отводится 2 академических часа (90 минут).

Рекомендуемое время выполнения каждого задания:

для каждого задания части А – до 3 минут;

для каждого задания части В– до 20 минут.

Желаем успеха!

2.1.2. Задания для оценки освоения умений и усвоения знаний

Задания для оценки освоения умений и усвоения знаний на экзамене приводятся в Приложении 1.

2.1.3. Бланки ответов для экзаменующихся

Бланк ответов для экзаменующихся приводится в Приложении 2.

2.2. Пакет для экзаменатора

Комплект контрольно-измерительных материалов позволяет оценивать освоение умений и усвоение знаний:

Показатели оценки результатов освоения программы учебной дисциплины

Номер задания и краткая характеристика	***Оцениваемые умения и знания***	***Показатели оценки результата***
А1 Закрытое тестовое задание с выбором одного правильного ответа из фиксированного набора вариантов	основные понятия комбинаторики;	Формулирует основные понятия комбинаторики Воспроизводит формулы для вычисления числа комбинаций для ✓ сочетаний ✓ размещений ✓ перестановок
А2 **А4-А5** **А7-А8** Закрытое тестовое задание с выбором одного правильного ответа из фиксированного набора вариантов	основные понятия теории вероятностей	Формулирует основные понятия теории вероятностей Воспроизводит формулы для вычисления вероятностей : ✓ простых событий ✓ сложных событий
А3, А6, А9 Закрытое тестовое задание с выбором одного правильного ответа из фиксированного набора вариантов	основные понятия теории вероятностей	Воспроизводит формулы для вычисления характеристик случайных величин
А10 Закрытое тестовое задание с выбором одного правильного ответа из фиксированного набора вариантов	основы математической статистики	Формулирует основные понятия математической статистики

Номер задания и краткая характеристика	*Оцениваемые умения и знания*	*Показатели оценки результата*
В1-В3 Задания открытого типа с развернутым ответом	умение применять стандартные методы и модели к решению комбинаторных, вероятностных и статистических задач	Задача решена с использованием соответствующего алгоритма. Приведены верные формулы расчета вероятностей Приведены верные формулы расчета числа комбинаций Расчетные ошибки отсутствуют

2.2.1 Инструкция для экзаменатора

Оцениваемые умения и знания:

- ✓ умение применять стандартные методы и модели к решению комбинаторных и вероятностных;
- ✓ знание основных понятий комбинаторики;
- ✓ знание основ теории вероятностей и математической статистики

Количество вариантов заданий для экзаменующихся: 6.

Каждый вариант состоит из двух частей и включает 13 заданий. Одинаковые по форме представления и уровню сложности задания сгруппированы в определённые части работы.

Часть А содержит в общей сложности 10 заданий с кратким ответом, базового уровня сложности (А1 - А10), предназначенных для проверки усвоенных знаний.

Часть Б содержит 3 задания с развёрнутым ответом, повышенного уровня сложности. Их обозначение в работе: В1, В2, В3, предназначены для проверки умений.

Рекомендуемое время выполнения каждого задания:

для каждого задания части А – до 3 минут;

для каждого задания части В – до 20 минут.

Максимальное время на выполнение экзаменационных заданий по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» 2 академических часа (90 минут).

Условия выполнения заданий

Использование информационно-справочных материалов: не требуется.

Использование оборудования:

Вычислительная сложность заданий требует использования калькуляторов, поэтому в целях обеспечения равенства всех участников экзамена использование калькуляторов на экзаменах допускается.

Рекомендации по проведению оценки**:**

1. Ознакомьтесь с заданиями для студентов, сдающих экзамен, оцениваемыми знаниями и умениями, показателями оценки.

2. Создайте доброжелательную обстановку, но не вмешивайтесь в ход (технику) выполнения задания.

3. Соберите выполненные задания через 90 минут после начала выполнения и проверьте правильность выполнения задания.

3.1. Ответы на задания части А проверяются сопоставлением с ключом, ответы на задания части В проверяются сопоставлением с ключом и модельным ответом. (Приложение 3)

3.2. Верное выполнение каждого задания части А оценивается 1 баллом.

За выполнение задания ставится 1 балл, если ответ верный, и 0 баллов, если:

а) в ответе допущена ошибка;

б) ответ отсутствует.

3.3. Требования к выполнению заданий части В заключаются в следующем:

Решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений обучающегося.

Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным. Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов).

Задания В1-В3 (с развёрнутым ответом) предусматривают проверку 5 элементов ответа. Наличие каждого элемента оценивается в 1 балл, поэтому максимальная оценка верно выполненного задания составляет 5 баллов. Задания с развёрнутым ответом могут быть выполнены студентами различными способами.

Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

Если решение экзаменующегося удовлетворяет этим требованиям, то ему выставляется полный балл, которым оценивается это задание: 5 баллов.

Если в решении допущена описка или ошибка, не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то экзаменующемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного.

Задание части В считается выполненным верно, если учащийся выбрал

а) правильный путь решения, из письменной записи решения понятен ход его рассуждений,

б) получен верный ответ.

3.4. Ключи к заданиям и модельные ответы, критерии оценки приведены в Приложении 3

4. Перенесите № вариантов и количество баллов, набранных студентом за выполнение каждого задания, в экзаменационную ведомость (Приложение 4)

5. Суммируйте баллы, полученные экзаменующимся за верно выполненные задания, и внесите полученную сумму в графу ИТОГО экзаменационной ведомости (Приложение 4).

6. Поставьте оценку, руководствуясь приведенной в ведомости шкалой

7. Поставьте роспись в конце экзаменационной ведомости.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ЭКЗАМЕНУЮЩИХСЯ

количество вариантов 6

Часть А

Напишите букву, соответствующую верному ответу,под номером вопроса в бланке ответов

Вариант 1

А1.

Соединения по m элементов, взятых из группы в n элементов, каждое из которых отличается от другого либо хотя бы одним элементом, либо порядком их расположения , называются

А) сочетания
Б) перестановки без повторений
В) размещения
Г) перестановки с повторениями

А2.

Вероятность появления случайного события заключена в пределах

А) любое число от 0 до 1
Б) любое положительное число
В) любое неотрицательное число
Г) любое число от -1 до 1

А3.

Монета была подброшена 10 раз. «Герб» выпал 4 раза. Частость (относительная частота) выпадения «герба» равна

А) 0
Б) 0,4
В) 0,5
Г) 0,6

А4.

Два события, непоявление одного из которых влечёт появление другого, называются

А) противоположные
Б) несовместные
В) равносильные
Г) совместные

А5.

Событие, которое не происходит ни при каком испытании, называется

А) невозможным
Б) достоверным
В) случайным
Г) независимым

А6.

Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно

А) 0
Б) 1
В) сумме математических ожиданий
Г) произведению математических ожиданий

А7.

В интегральной теореме Муавра-Лапласа используется функция

А) интегральная
Б) дифференциальная
В) функция Лапласа
Г) функция Гаусса

А8.

В задачах на расчёт вероятности того, что в n независимых испытаниях событие A появится ровно m раз, при большом числе испытаний и вероятности p, отличной от 0 и 1, используется

А) локальная теорема Муавра-Лапласа
Б) формула Пуассона
В) интегральная теорема Муавра-Лапласа
Г) формула Бернулли

А9.
Функция распределения непрерывной случайной величины есть ____ её функции плотности вероятности

А) производная
Б) первообразная
В) функция Лапласа
Г) функция Гаусса

А10.
В теории статистического оценивания оценки бывают

А) только интервальные
Б) только точечные
В) точечные и интервальные
Г) локальные

Часть А

Напишите букву, соответствующую верному ответу, под номером вопроса в бланке ответов

Вариант 2

А1.
Соединения по m элементов, взятых из группы в n элементов, каждое из которых отличается от других хотя бы одним элементом, называются

А) сочетания
Б)перестановки без повторений
В) размещения
Г) перестановки с повторениями

А2.
Вероятность достоверного события равна

А) 0,5
Б) 0
В) 1
Г) 0,25

А3.
Представление об одномерной случайной величине дают следующие основные числовые характеристики

А) математическое ожидание и дисперсия
Б) математическое ожидание
В) дисперсия
Г) среднеквадратичное отклонение

А4.
Два события, сумма которых есть событие достоверное, а произведение — событие невозможное, называются

А) несовместные
Б) равносильные
В) противоположные
Г) совместные

А5.
Событие, которое обязательно происходит при каждом испытании, называется

А) невозможным
Б) достоверным
В) случайным
Г) независимым

А6.
При вынесении постоянной величины за знак математического ожидания эту величину

А) возводят в квадрат
Б) извлекают квадратный корень
В) умножают на n
Г) выносят за скобки

А7.
В локальной теореме Муавра-Лапласа используется функция

А) интегральная

Б) дифференциальная
В) функция Лапласа
Г) функция Гаусса

А8.

В задачах на расчёт вероятности того, что в n независимых испытаниях событие A появится ровно m раз, при малом числе испытаний используется

А) локальная теорема Муавра-Лапласа
Б) формула Пуассона
В) интегральная теорема Муавра-Лапласа
Г) формула Бернулли

А9.

Функция плотности вероятности непрерывной случайной величины есть ___ её функции распределения

А) производная
Б) первообразная
В) функция Лапласа
Г) функция Гаусса

А10.

Если случайная величина распределена по нормальному закону, то средняя арифметическая $\bar{x}$ распределена:

А) по биномиальному закону
Б) по нормальному закону
В) не имеет определённого закона распределения
Г) по закону Пуассона

Часть А

Напишите букву, соответствующую верному ответу,под номером вопроса в бланке ответов

Вариант 3

А1.

Соединения по n элементов, каждое из которых отличается от другого порядком элементов, называются

А) сочетания
Б) перестановки без повторений
В) размещения
Г) перестановки с повторениями

А2.

Вероятность невозможного события равна

А) 0,5
Б) 0
В) 1
Г) 0,25

А3.

Вероятность совместного появления двух независимых событий можно вычислить по формуле

А) $P(A) + P(B) - P(AB)$;
Б) $P(A) + P(B)$;
В) $P(A)P(B/A)$;
Г) $P(A)P(B)$.

А4.

Отношением числа случаев, благоприятствующих событию А, к числу всех возможных случаев называется

А) вероятность
Б) математическое ожидание
В) число сочетаний
Г) число размещений

А5.

Два события называют несовместными, если

А) они должны произойти при каждом испытании
Б) они могут произойти одновременно в результате испытания
В) их совместное наступление в результате испытания невозможно
Г) их наступление в результате испытания невозможно

А6.
При вынесении постоянной величины за знак дисперсии эту величину
А) возводят в квадрат
Б) извлекают квадратный корень
В) умножают на n
Г) выносят за скобки

А7.
Из предложенных распределений случайной величины является дискретным
А) показательное
Б) нормальное
В) биномиальное
Г) равномерное

А8.
Интеграл в бесконечных пределах от функции плотности вероятности непрерывной случайной величины равен
А) 0
Б) любому числу от 0 до 1
В) 1
Г) положительному числу

А9.
Функция распределения любой случайной величины есть функция
А) неубывающая
Б) убывающая
В) невозрастающая
Г) возрастающая

А10.
Репрезентативность выборки достигается
А) подбором наблюдений
Б) случайностью отбора
В) объёмом выборки
Г) временем наблюдений

Часть А

Напишите букву, соответствующую верному ответу,под номером вопроса в бланке ответов

Вариант 4

А1.
Число размещений из n по m вычисляется по формуле
А) $n!$
Б) $\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$
В) $\frac{n!}{(n-m)!}$
Г) $m!$

А2.
Два события, которые не могут произойти одновременно, называются
А) невозможными
Б) совместными
В) независимыми
Г) несовместными

А3.
Математическое ожидание постоянной величины равно
А) 0
Б) 1
В) этой величине
Г) квадрату этой величины

А4.
Отношением числа случаев, благоприятствующих событию А, к числу всех возможных случаев называется

А) математическое ожидание
Б) дисперсия
В) вероятность
Г) число размещений

А5.
Два события называют совместными, если
А) они должны произойти при каждом испытании
Б) они могут произойти одновременно в результате испытания
В) их совместное наступление невозможно
Г) они не должны произойти при каждом испытании

А6.
Если все значения случайной величины увеличить на какое-то число, то её дисперсия
А) не изменится
Б) увеличится на это число
В) уменьшится на это число
Г) увеличится в это число раз

А7.
Из предложенных распределений случайной величины непрерывным является
А) пуассоновское
Б) геометрическое
В) биномиальное
Г) равномерное

А8.
Функция плотности вероятности непрерывной случайной величины может принимать следующие значения
А) любые неотрицательные значения
Б) от 0 до 1
В) любые положительные значения
Г) от -1 до 1

А9.
Функция распределения любой случайной величины есть функция
А) неубывающая
Б) убывающая
В) невозрастающая
Г) возрастающая

А10.
Выборочной совокупностью (выборкой) называют множество результатов, отобранных из генеральной совокупности
А) по определенному критерию
Б) по определённому правилу
В) случайным образом
Г) по временному фактору

Часть А

Напишите букву, соответствующую верному ответу,под номером вопроса в бланке ответов

Вариант 5

А1.
Число перестановок из n по m вычисляется по формуле
А) $n!$
Б) $\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$
В) $\frac{n!}{(n-m)!}$
Г) $m!$

А2.
Два события, которые могут произойти одновременно, называются
А) зависимыми

Б) совместными
В) независимыми
Г) несовместными

А3.
Монета была подброшена 10 раз. «“Герб» не выпал ни разу. Частость (относительная частота) выпадения «герба» равна
А) 0
Б) 0,4
В) 0,5
Г) 0,6

А4.
Если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло ли другое событие, то они называются
А) независимыми
Б) совместными
В) зависимыми
Г) несовместными

А5.
Постоянную величину вынести за знак дисперсии
А) нельзя ни при каких условиях
Б) можно, при этом извлечь из нее корень
В) можно, умножив при этом на n
Г) можно, возведя при этом в квадрат

А6.
Математическое ожидание суммы случайных величин равно
А) 0
Б) 1
В) сумме их математических ожиданий
Г) произведению их математических ожиданий

А7.
По формуле Бернулли рассчитываются вероятности у следующего распределения случайной величины
А) пуассоновского
Б) нормального
В) биномиального
Г) равномерного

А8.
Функция распределения случайной величины может принимать следующие значения
А) любые неотрицательные значения
Б) от 0 до 1
В) любые положительные значения
Г) от -1 до 1

А9.
Функция распределения непрерывной случайной величины есть ____ её функции плотности вероятности
А) производная
Б) функция Лапласа
В) первообразная
Г) функция Гаусса

А10.
Выборка репрезентативна. Это означает, что
А) она неправильно отражает пропорции генеральной совокупности
Б) она правильно отражает пропорции генеральной совокупности
В) ее объем превышает 30 наблюдений
Г) ее объем превышает 3000 наблюдений

Часть А

Напишите букву, соответствующую верному ответу, под номером вопроса в бланке ответов:

Вариант 6

А1.

Число сочетаний из n по m вычисляется по формуле

А) $n!$

Б) $\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$

В) $\frac{n!}{(n-m)!}$

Г) $m!$

А2.

Вероятность появления случайного события может быть

А) любым неотрицательным числом

Б) любым положительным числом

В) любым числом от 0 до 1

Г) любым числом от -1 до 1

А3.

Дисперсия постоянной величины равна

А) 0

Б) 1

В) этой величине

Г) квадрату этой величины

А4.

Случайным называется событие

А) которое должно либо произойти, либо не произойти

Б) которое вряд ли произойдет

В) которое произойдет, но не скоро

Г) которое неожиданно произошло

А5.

Если вероятность наступления одного события зависит от того, произошло ли другое событие, то они называются

А) зависимыми

Б) совместными

В) независимыми

Г) несовместными

А6.

Если все значения случайной величины увеличить на какое-то число, её математическое ожидание

А) не изменится

Б) увеличится на это число

В) уменьшится на это число

Г) увеличится в это число раз

А7.

Вероятность совместного появления двух зависимых событий можно вычислить по формуле

А) P(A) + P(B) – P(AB);

Б) P(A) + P(B);

В) P(A)P(B/A);

Г) P(A)P(B).

А8.

В задачах на расчёт вероятности того, что в n независимых испытаниях событие A появится от a до b раз, при большом числе испытаний и вероятности p , отличной от 0 и 1, используется

А) локальная теорема Муавра-Лапласа

Б) формула Пуассона

В) интегральная теорема Муавра-Лапласа

Г) формула Бернулли

А9.

Функция плотности вероятности непрерывной случайной величины есть ___ её функции распределения

А) производная
Б) первообразная
В) функция Лапласа
Г) функция Гаусса

А10.
К основным свойствам точечных оценок относятся
А) несмещенность и эффективность
Б) смещенность. эффективность и состоятельность
В) несмещенность, эффективность и состоятельность
Г) несмещенность и состоятельность

Часть В

Выберите номер варианта заданий согласно номеру в списке экзаменационной ведомости.

Для записи ответов к заданиям этой части (В1–В3) используйте бланк ответов.
Запишите сначала номер задания (В1 и т.д.), а затем полное решение.
Ответы записывайте четко и разборчиво. Результат округляйте с точностью до 10^{-4}

В1. Прочитайте описание ситуации. Приведите решение задачи

В партии из N изделий n изделий имеют скрытый дефект (таб.1). Какова вероятность того, что из взятых наугад m изделий k изделий являются дефектными?

Таблица 1. Исходные данные для задания В1

Вариант	*N*	*n*	*m*	*k*		*Вариант*	*N*	*n*	*m*	*k*
1	20	4	5	2		16	20	5	4	1
2	30	5	5	3		17	16	6	5	3
3	20	5	4	2		18	18	5	4	2
4	25	6	5	3		19	14	4	3	1
5	15	4	3	2		20	10	4	3	2
6	20	6	4	1		21	16	5	3	2
7	30	4	3	2		22	20	6	4	3
8	16	4	3	2		23	26	5	4	2
9	18	6	5	3		24	32	8	5	3
10	12	5	4	2		25	34	10	6	4
11	30	10	5	3		26	30	6	5	3
12	26	8	6	4		27	25	5	3	2
13	24	8	5	3		28	24	6	4	3
14	22	6	4	2		29	28	8	5	2
15	20	5	3	2		30	24	6	3	2

В2. Прочитайте описание ситуации. Приведите решение задачи

В магазине выставлены для продажи n изделий, среди которых k изделий некачественные (таб.2). Какова вероятность того, что взятые случайным образом m изделий будут некачественными?

Таблица 2. Исходные данные для задания В2

Вариант	*n*	*k*	*m*		*Вариант*	*n*	*k*	*m*
1	20	6	2		16	15	5	2
2	18	8	3		17	17	6	3
3	16	6	2		18	18	8	4
4	14	5	3		19	20	7	2
5	12	4	3		20	22	6	3
6	10	4	2		21	26	8	2
7	18	6	3		22	28	7	3
8	22	8	2		23	30	10	2
9	24	10	3		24	26	6	2
10	26	6	2		25	28	10	3

Вариант	n	k	m		Вариант	n	k	m
11	30	8	3		26	14	5	2
12	25	7	2		27	18	5	3
13	23	6	3		28	16	4	2
14	24	8	2		29	17	3	2
15	30	9	3		30	19	6	3

В3. Прочитайте описание ситуации. Приведите решение задачи

На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: *n1* с первого завода, *n2* – со второго, *n3* – с третьего (таб.3). Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе *p1,* на втором *p2*, на третьем – *p3.* Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным?

Таблица 3. Исходные данные для задания В3

Вариант	n1	p1	n2	p2	n3	p3
1	25	0,9	35	0,8	40	0,7
2	15	0,8	25	0,7	10	0,7
3	40	0,9	35	0,7	25	0,9
4	25	0,7	10	0,9	15	0,8
5	10	0,9	20	0,8	20	0,6
6	40	0.8	30	0.8	30	0.9
7	20	0.8	50	0.9	30	0.8
8	35	0.7	35	0.8	30	0.9
9	15	0.9	45	0.8	40	0.9
10	40	0.8	15	0.7	45	0.8
11	20	0.9	15	0.9	15	0.8
12	14	0.8	26	0.9	10	0.8
13	16	0.8	40	0.9	44	0.7
14	30	0.9	20	0.7	50	0.7
15	20	0.8	10	0.9	20	0.9
16	25	0,9	35	0,8	40	0,7
17	15	0,8	25	0,7	20	0,9
18	40	0,9	25	0,8	35	0,8
19	14	0,8	26	0,6	20	0,7
20	18	0,9	32	0,8	30	0,7
21	30	0.9	20	0.7	10	0.8
22	16	0.9	24	0.8	60	0.9
23	30	0.9	10	0.7	10	0.7
24	15	0.8	35	0.9	50	0.8
25	40	0.8	20	0.8	40	0.9
26	10	0.9	20	0.8	10	0.6
27	35	0.8	25	0.7	50	0.8
28	40	0.8	20	0.9	40	0.8
29	30	0.9	40	0.8	30	0.9
30	10	0.7	20	0.9	20	0.7

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

БЛАНК ОТВЕТОВ ДЛЯ ЭКЗАМЕНУЮЩИХСЯ

для итогового контроля в форме экзамена по учебной дисциплине
«Теория вероятностей и математическая статистика»
обучающихся в группе ___курса _____
по специальности 230115 Программирование в компьютерных системах; базовой подготовки

ФИО студента ______________________
Дата ________________
Вариант ________________

Часть А

№ задания	**А1**	**А2**	**А3**	**А4**	**А5**	**А6**	**А7**	**А8**	**А9**	**А10**
Ответ										

Часть В

№ задания	***ответ***
В1	*Ответ:*
В2	*Ответ:*
В3	*Ответ:*

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

КЛЮЧИ, МОДЕЛЬНЫЕ ОТВЕТЫ ДЛЯ ЭКЗАМЕНАТОРОВ

для итогового контроля в форме экзамена по учебной дисциплине

«Теория вероятностей и математическая статистика»

обучающихся в группе ___курса _____

по специальности 230115 Программирование в компьютерных системах; базовой подготовки

Часть А

Ключ к закрытому тесту с выбором одного правильного ответа из фиксированных значений

№ задания/ вариант	А1	А2	А3	А4	А5	А6	А7	А8	А9	А10
1	**В**	**А**	**Б**	**А**	**А**	**Г**	**В**	**А**	**Б**	**В**
2	**А**	**В**	**А**	**В**	**Б**	**Г**	**В**	**Г**	**А**	**Б**
3	**Б**	**Б**	**А**	**А**	**В**	**А**	**В**	**В**	**А**	**Б**
4	**В**	**Г**	**А**	**В**	**Б**	**А**	**Г**	**Б**	**А**	**Б**
5	**А**	**Б**	**А**	**А**	**Г**	**В**	**В**	**Б**	**В**	**Б**
6	**Б**	**В**	**А**	**А**	**А**	**Б**	**А**	**В**	**А**	**В**

Часть В

ЗАДАНИЕ В1

Модельные ответы и критерии оценивания заданий с развернутым ответом с разбалловкой

Содержание верного ответа и указания по оцениванию (допускаются иные формулировки ответа, не искажающие его смысла)	**Баллы**
Элементы ответа 1) Приведена верная последовательность всех шагов решения (п.2) – п.5). 2) верно выбран метод решения задачи: классическое определение вероятности $P = \frac{m}{n}$ 3) Верно используются формулы комбинаторики $m = C_n^k * C_{N-n}^{m-k}$ 4) найдено решение выбранным методом 5) ответ соответствует ключу	 1 1 1 1 1
Максимальный балл за выполнение задания В1	5 баллов

Ключи к ответу на задание В1

Вариант	**Ответ**
1	0.2167
2	0.0211
3	0.2167
4	0.0644
5	0.1451
6	0.4508
7	0.0384
8	0.1286
9	0.1541
10	0.4242
11	0.1600
12	0.0465
13	0.1581
14	0.2461
15	0.1316

Вариант	**Ответ**
16	0.4696
17	0.2060
18	0.2549
19	0.4945
20	0.3000
21	0.1964
22	0.0578
23	0.1405
24	0.0768
25	0.0431
26	0.0387
27	0.0870
28	0.0339
29	0.3248
30	0.1334

Задание В2

Модельные ответы и критерии оценивания заданий с развернутым ответом с разбалловкой

Содержание верного ответа и указания по оцениванию (допускаются иные формулировки ответа, не искажающие его смысла)	**Баллы**
Элементы ответа 1) Приведена верная последовательность всех шагов решения (п.2) – п.5). 2) Верно используются формулы вероятности произведения несовместных событий: P(AB)=P(A)*P(B) 3) верно выбран метод решения задачи - формула условной вероятности $P=\frac{k}{n}*\frac{k-1}{n-1}*...*\frac{k-m+1}{n-m+1}$ 4) найдено решение выбранным методом 5) ответ соответствует ключу	1 1 1 1 1
Максимальный балл за выполнение задания В2	5 баллов

Ключ к ответу на задание В2

Вариант	**Ответ**
1	0.0789
2	0.0686
3	0.1250
4	0.0275
5	0.0182
6	0.3333
7	0.0245
8	0.1212
9	0.0593
10	0.0462
11	0.0138
12	0.0700
13	0.0113
14	0.1014
15	0.0207

Вариант	**Ответ**
16	0.0952
17	0.0294
18	0.0229
19	0.1105
20	0.0130
21	0.0862
22	0.0107
23	0.1034
24	0.0462
25	0.0366
26	0.1099
27	0.0123
28	0.0500
29	0.0221
30	0.0206

Задание В3

Модельные ответы и критерии оценивания заданий с развернутым ответом с разбалловкой

Содержание верного ответа и указания по оцениванию (допускаются иные формулировки ответа, не искажающие его смысла)	**Баллы**
Элементы ответа 1) Приведена верная последовательность всех шагов решения (п.2) – п.5). 2) верно выбран метод решения задачи -формула полной вероятности P(B) = P(A1)*p1+ P(A2)*p2+ P(A3)*p3, 3) Верно используются формулы классического определения вероятности $P(A_i)=\frac{n_i}{n_1+n_2+n_3}$ 4) найдено решение выбранным методом 5) ответ соответствует верному решению, приведенному в таблице ответов	1 1 1 1 1
Максимальный балл за выполнение задания В3	5 баллов

Ключ к ответу на задание В3

Вариант	Ответ	Вариант	Ответ
1	0,7850	**16**	0,7850
2	0,7300	**17**	0,7917
3	0,8300	**18**	0,8400
4	0,7700	**19**	0,6800
5	0,7400	**20**	0,7850
6	0,8300	**21**	0,8167
7	0,8500	**22**	0,8760
8	0,7950	**23**	0,8200
9	0,8550	**24**	0,8350
10	0,7850	**25**	0,8400
11	0,8700	**26**	0,7750
12	0,8520	**27**	0,7773
13	0,7960	**28**	0,8200
14	0,7600	**29**	0,8600
15	0,8600	**30**	0,7800

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Министерство образования Республики Башкортостан
ГАОУ СПО Стерлитамакский колледж строительства, экономики и права

ОЦЕНОЧНАЯ ВЕДОМОСТЬ

для итогового контроля в форме экзамена по учебной дисциплине
«Теория вероятностей и математическая статистика»
обучающихся в группе ___курса _____
по специальности 230115 Программирование в компьютерных системах базовой подготовки

№	*ФИО студента*	*№ вар*	*Итого баллов*	*Оценка*
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				

*Максимальное время, отведённое на проведение экзамена, 90 минут.

Шкала для выставления оценки по количеству набранных студентом баллов:

Сумма баллов	**% выполнения заданий**	**Оценка**
23-25 баллов	90-100%	отлично
19-22 баллов	75-89%	хорошо
15-18 баллов	60-74%	удовлетворительно
0-14 баллов	Менее 60%	неудовлетворительно

Дата проведения экзамена «____»_____________201__года

Эксперт________(____________) Преподаватель________(____________)

РАЗДЕЛ 7. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

7.1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПРЕПОДАВАТЕЛЮ

7.1.1. Организация занятий и контроля знаний

Преподавание дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» предусматривает:

- проведение лекций;
- проведение практических занятий;
- проведение лабораторных занятий;
- выполнение домашних заданий;
- реферирование ;
- проведение контрольных работ по разделам;
- аналитический обзор литературы определенной тематики
- проведение экзаменационных испытаний
- самостоятельная работа студентов (изучение теоретического материала, подготовка к практическим занятиям, выполнение домашних лабораторных заданий, реферирование, составление сводной таблицы, подготовка к контрольной работе).

В рамках изучения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» необходимо предусмотреть развитие форм самостоятельной работы студентов.

Пакет базовых заданий для самостоятельной работы (индивидуальные типовые расчеты во время лабораторно-практических заданий, вопросы для подготовки к экзамену, тематику контрольных работ, тематику и вопросы для подготовки рефератов) следует выдавать в начале семестра, определив предельные сроки выполнения и сдачи. Задания для самостоятельной работы желательно составлять из базовой и дополнительной частей. Организуя самостоятельную работу, необходимо постоянно обучать студентов методам такой работы.

Содержание лекции должно отвечать следующим дидактическим требованиям:

- изложение материала от простого к сложному, от известного к неизвестному;
- логичность, четкость и ясность в изложении материала;
- возможность проблемного изложения, дискуссии, диалога с целью активизации деятельности студентов;
- связь теоретических положений и выводов с практикой.

Преподаватель, читающий лекционные курсы в колледже, должен знать существующие в педагогической науке и используемые на практике варианты лекций, их дидактические и воспитывающие возможности, а также их методическое место в структуре процесса обучения.

При чтении лекций и проведении практических занятий преподаватель должен обратить особое внимание на изложение следующих тем дисциплины:

- **Случайные события:** виды случайных событий; понятие вероятности события; теоремы сложения вероятностей совместных и несовместных событий; теоремы умножения вероятностей; формула полной вероятности; формула Байеса; формула Бернулли.
- **Случайные величины:** виды случайных величин (дискретные и непрерывные случайные величины); распределение вероятностей дискретной случайной величины; функция распределения вероятностей случайной величины; плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины числовые характеристики случайных величин, их свойства; закон равномерного распределения вероятностей; экспотенциальное распределение; нормальное распределение.
- **Системы случайных величин:** числовые характеристики системы двух случайных величин
- **Статистическое описание результатов наблюдений. Статистические методы обработки результатов наблюдений:** типы выборок; генеральная совокупность и выборка; вариационный ряд; полигон частот и гистограмма; эмпирическая функция распределения; статистические оценки; статистическая проверка статистических гипотез.

Преподаватель должен рекомендовать студентам изучать разделы дисциплины путем прослушивания и конспектирования лекций и материалов практических занятий, а также путем самостоятельной работы с рекомендуемой учебной литературой.

Лекции по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» целесообразно читать в аудитории, оснащённой проекционной аппаратурой для демонстрации заранее подготовленных компьютерных презентаций. Презентации должны содержать опорный материал для конспектирования:

отражать логику изложения в виде иерархической структуры, содержать основные определения, табличный и графический иллюстрационный материал. Определяющим требованием к презентации является её способность привить базовые навыки отражения смысла моделируемых процессов математическими записями и восприятия математической нотации, используемой при формулировании изучаемых вероятностных и статистических моделей, а также дать необходимые основы для выполнения заданий лабораторного практикума.

В начале каждой лекции и практического занятия рекомендуется кратко напомнить основные положения материала предыдущего занятия, а в конце – обобщить изложенный материал и ответить на вопросы студентов. При проведении практических занятий с разбором решений типовых задач целесообразно акцентировать внимание студентов на распространенных ошибках и пояснять причины их возникновения.

Организация лабораторно-практических занятий предполагает самостоятельную формализацию поставленной преподавателем задачи. Для проведения соответствующих расчётов на компьютере средствами табличного процессора EXCEL либо специализированного программного обеспечения, оформления отчёта используются *лабораторно-практические занятия.* Для достижения целей данного курса лабораторно-практические занятия проводятся в компьютерных классах, оснащённых программным обеспечением, реализующим изучаемые вероятностные и статистические методы.

<u>Самостоятельная работа</u> по курсу используется:

- для проработки конспектов лекций и обязательной учебной литературы по курсу;
- при необходимости – для ознакомления с рекомендуемой литературой;
- для написания реферата, предусмотренного данной рабочей программой;
- для выполнения расчётного задания по теме ;
- для выполнения тех заданий лабораторного практикума, которые, как правило, не вызывают затруднений у студентов и потому могут быть выполнены в отсутствие преподавателя;

Выполнение контрольной работы, выполнение и защита индивидуальных типовых расчетов и рефератов являются необходимым условием положительной оценки промежуточной и итоговой аттестации студента по дисциплине.

Порядок подготовки и защиты индивидуальных типовых расчетов изложен в методических указаниях для студентов.

При защите индивидуальных типовых расчетов, выполненных во время лабораторно-практических занятий, можно использовать следующие критерии (показатели) оценки ответов:

1. полнота и конкретность ответа, его обоснованность и доказательность;
2. последовательность и логика изложения;
3. уровень культуры речи (при защите в форме собеседования);
4. при выполнении практического задания: умение правильно определить возможные методы и способы решения задачи и выбрать из них наиболее оптимальный; верность полученного результата и всего решения в целом.

По результатам защиты индивидуальных типовых расчетов рекомендуется дать общую оценку результатов как каждого студента, так и всей группы в целом, обратив особое внимание на следующие аспекты:

5. качество подготовки;
6. степень усвоения знаний;
7. положительные стороны и недостатки в работе студентов;
8. задачи и пути устранения недостатков.

Также рекомендуется давать подобную оценку по результатам защиты рефератов, выполнения контрольной работы и в конце каждого практического занятия со студентами.

При изложении материала важно помнить, что почти половина информации на лекции передается через интонацию. Учитывать тот факт, что первый кризис внимания студентов наступает на 15-20-й минутах, второй - на 30-35-й минутах.

При проведении аттестации студентов важно всегда помнить, что систематичность, объективность, аргументированность - главные принципы, на которых основаны контроль и оценка знаний студентов. Проверка, контроль и оценка знаний студента, требуют учета его индивидуального стиля в осуществлении учебной деятельности. Знание критериев оценки знаний обязательно для преподавателя и студента.

Характеристика используемых форм, методов и технологий контроля учебной работы (аттестации) студента

Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации должен проводится в строгом соответствии с положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов в колледже. Требования к итоговой аттестации, определяются требованиями к итоговой аттестации, установленными федеральными государственными образовательными стандартами среднего профессионального образования по направлению подготовки 230000 Информатика и вычислительная техника

1. Промежуточная аттестация.

Промежуточная аттестация проводится по результатам выполнения домашних заданий по разделу «Случайные события» (первая промежуточная аттестация), а также по результатам выполнения домашних заданий, контрольной работы и сдачи рефератов по разделам «Случайные величины» и «Системы случайных величин» (вторая промежуточная аттестация).

2. Домашние задания.

На каждом практическом занятии студент получает домашнее задание — набор задач из сборника заданий, используемого в качестве основной литературы при преподавании дисциплины.

3. Выполнение контрольной работы.

Контрольная работа выполняется на аудиторном занятии. Примерный вариант заданий для контрольной работы приведен в разделе «Рубежный контроль».

4.Выполнение и защита индивидуальных типовых расчетов.

Индивидуальные типовые расчеты выполняются студентами на аудиторных лабораторно-практических занятиях (в рамках самостоятельной работы). Защита индивидуальных типовых расчетов проводится только после правильного выполнения всех заданий. При защите индивидуальных типовых расчетов студенту задают два вопроса по теоретическим материалам соответствующего раздела дисциплины

5. Итоговая аттестация по дисциплине (экзамен).

Итоговой аттестацией по дисциплине является экзамен. Для его проведения имеются контрольно-оценочные средства (представлены в разделе «Итоговый контроль по дисциплине»

7.1.2. Организация и контроль самостоятельной работы

В современный период востребованы высокий уровень знаний, академическая и социальная мобильность, профессионализм специалистов, готовность к самообразованию и самосовершенствованию. В связи с этим должны измениться подходы к планированию, организации учебно-воспитательной работы, в том числе и самостоятельной работы студентов.

Прежде всего, это касается изменения характера и содержания учебного процесса, переноса акцента на самостоятельный вид деятельности, который является не просто самоцелью, а средством достижения глубоких и прочных знаний, инструментом формирования у студентов активности и самостоятельности.

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности учебного процесса, в том числе благодаря самостоятельной работе, в которой студент становится активным субъектом обучения, что означает:

- способность занимать в обучении активную позицию;
- готовность мобилизовать интеллектуальные и волевые усилия для достижения учебных целей;
- умение проектировать, планировать и прогнозировать учебную деятельность;
-привычку инициировать свою познавательную деятельность на основе внутренней положительной мотивации;
- осознание своих потенциальных учебных возможностей и психологическую готовность составить программу действий по саморазвитию.

Организация и контроль самостоятельной работы

Для успешного выполнения самостоятельной работы студентов необходимо планирование и контроль со стороны преподавателей.

Аудиторная самостоятельная работа выполняется студентами на лекциях, лабораторно-практических занятиях, и, следовательно, преподаватель должен заранее выстроить систему самостоятельной работы, учитывая все ее формы, цели, отбирая учебную и научную информацию и средства (методических) коммуникаций, продумывая роль студента в этом процессе и свое участие в нем.

Вопросы для самостоятельной работы студентов, указанные в рабочей программе дисциплины, предлагаются преподавателями в начале изучения дисциплины. Студенты имеют право выбирать дополнительно интересующие их темы для самостоятельной работы.

Содержание деятельности преподавателя и студента при выполнении самостоятельной работы представлено в таблице [2].

+Виды самостоятельной работы студентов

Репродуктивная самостоятельная работа	Самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы, прослушивание лекций, магнитофонных записей, заучивание, пересказ, запоминание, Интернет-ресурсы, повторение учебного материала и др.

Познавательно-поисковая самостоятельная работа	Подготовка сообщений, докладов, выступлений на семинарских и практических занятиях, подбор литературы по дисциплинарным проблемам, написание рефератов, контрольных, курсовых работ и др.

Творческая самостоятельная работа	Написание рефератов, научных статей, участие в научно-исследовательской работе, подготовка дипломной работы (проекта). Выполнение специальных заданий и др., участие в студенческой научной конференции.

Внеаудиторная самостоятельная работа студентов (далее самостоятельная работа)

–планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская деятельность студентов, осуществляемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Она включает в себя:

-подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим, семинарским, лабораторным работам и др.) и выполнение соответствующих заданий;

- самостоятельную работу над отдельными темами учебных дисциплин
в соответствии с учебно-тематическими планами;

-написание рефератов, докладов, эссе;

-подготовку ко всем видам практики и выполнение предусмотренных ими заданий;

-выполнение письменных контрольных работ;

-подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к экзаменам;

-работу в студенческих научных обществах, кружках, семинарах и др.;

-участие в работе факультативов, спецсеминаров и т.п.;

- участие в научных и научно-практических конференциях, семинарах, конгрессах и т.п.;

-другие виды деятельности, организуемой и осуществляемой колледжем.

Выполнение любого вида самостоятельной работы предполагает прохождение студентами следующих этапов:

-определение цели самостоятельной работы;

-конкретизация познавательной (проблемной или практической) задачи;

-самооценка готовности к самостоятельной работе по решению поставленной или выбранной задачи;

-выбор адекватного способа действий, ведущего к решению задачи (выбор путей и средств для ее решения);

-планирование (самостоятельно или с помощью преподавателя) самостоятельной работы по решению задачи;

-реализация программы выполнения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа

Основные характеристики	Деятельность преподавателя	Деятельность студентов
Цель выполнения СР	- Объясняет цель и смысл выполнения СР; - дает развернутый или краткий инструктаж о требованиях, предъявляемых к СР и способах ее выполнения, - демонстрирует образец СР	- Понимает и принимает цель СР как личностно значимую; - знакомится с требованиями к СР
Мотивация	- Раскрывает теоретическую и практическую значимость выполнения СР, тем самым формирует у студента познавательную потребность и готовность к выполнению СР; - мотивирует студента на достижение успеха	- Формирует собственную познавательную потребность в выполнении СР; - формирует установку и принимает решение о выполнении СР
Управление	- Осуществляет управление путем целенаправленного воздействия на процесс выполнения СР; - дает общие ориентиры выполнения СР	На основе владения обобщенным приемом сам осуществляет управление СР (проектирует, планирует, рационально распределяет время и т.д.)
Контроль и коррекция выполнения СР	- Осуществляет предварительный контроль, предполагающий выявление исходного уровня готовности студента к выполнению СР; - осуществляет итоговый контроль конечного результата выполнения СР	- Осуществляет текущий операционный самоконтроль за ходом выполнения СР; - выявляет, анализирует и исправляет допущенные ошибки и вносит коррективы в работу, отслеживает ход выполнения СР; - ведет поиск оптимальных способов выполнения СР; - осуществляет рефлексивное отношение к собственной деятельности; - осуществляет итоговый самоконтроль результата СР
Оценка	- На основе сличения результата с образцом, заранее заданными критериями дает оценку СР; - выявляет типичные ошибки, подчеркивает положительные и отрицательные стороны, дает методические советы по выполнению СР, намечает дальнейшие пути выполнения СР; - устанавливает уровень и определяет качество продвижения студента и тем самым формирует у него мотивацию достижения успеха в учебной деятельности	- На основе соотнесения результата с целью дает самооценку СР, своим познавательным возможностям, способностям и качествам

7.2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

7.2.1. Методические рекомендации по работе с литературой

Важной составляющей самостоятельной внеаудиторной подготовки является работа с литературой ко всем видам занятий: лекционным, практическим, при подготовке к зачетам, экзаменам, тестированию, участию в научных конференциях.

Умение работать с литературой означает научиться осмысленно пользоваться источниками. Прежде чем приступить к освоению научной литературы, рекомендуется чтение учебников и учебных пособий.

Существует несколько методов работы с литературой.

Один из них –самый известный –*метод повторения*: прочитанный текст можно заучить наизусть. Простое повторение воздействует на память механически и поверхностно. Полученные таким путем сведения легко забываются.

Наиболее эффективный метод –*метод кодирования*: прочитанный текст нужно подвергнуть большей, чем простое заучивание, обработке.

Чтобы основательно обработать информацию и закодировать ее для хранения, важно произвести целый ряд мыслительных операций: прокомментировать новые данные; оценить их значение; поставить вопросы; сопоставить полученные сведения с ранее известными.

Для улучшения обработки информации очень важно устанавливать осмысленные связи, структурировать новые сведения.

Изучение научной, учебной и иной литературы требует ведения рабочих записей.

Форма записей может быть весьма разнообразной: простой или развернутый план, тезисы, цитаты, конспект.

План – первооснова, каркас какой-либо письменной работы, определяющие последовательность изложения материала.

План является наиболее краткой и потому самой доступной и распространенной формой записей содержания исходного источника информации. По существу, это перечень основных вопросов, рассматриваемых в источнике. План может быть простым и развернутым. Их отличие состоит в степени детализации содержания и, соответственно, в объеме.

Преимущество плана состоит в следующем.Во-первых, план позволяет наилучшим образом уяснить логику мысли автора, упрощает понимание главных моментов произведения.

Во-вторых, план позволяет быстро и глубоко проникнуть в сущность построения произведения и, следовательно, гораздо легче ориентироваться в его содержании.

В-третьих, план позволяет –при последующем возвращении к нему –быстрее обычного вспомнить прочитанное.

В-четвертых, с помощью плана гораздо удобнее отыскивать в источнике нужные места, факты, цитаты и т. д.

Выписки–небольшие фрагменты текста (неполные и полные предложения, отдельные абзацы, а также дословные и близкие к дословным записи об излагаемых в нем фактах), содержащие в себе квинтэссенцию содержания прочитанного.

Выписки представляют собой более сложную форму записей содержания исходного источника информации. По сути, выписки –не что иное, как цитаты, заимствованные из текста. Выписки позволяют в концентрированной форме и с максимальной точностью воспроизвести в произвольном (чаще последовательном) порядке наиболее важные мысли автора, статистические и даталогические сведения. В отдельных случаях —когда это оправданно с точки зрения продолжения работы над текстом –вполне допустимо заменять цитирование изложением, близким к дословному.

Тезисы–сжатое изложение содержания изученного материала в утвердительной (реже опровергающей) форме.

Отличие тезисов от обычных выписок состоит в следующем.

Во-первых, тезисам присуща значительно более высокая степень концентрации материала.

Во-вторых, в тезисах отмечается преобладание выводов над общими рассуждениями.

В-третьих, чаще всего тезисы записываются близко к оригинальному тексту, т. е. без использования прямого цитирования.

Исходя из сказанного, нетрудно выявить основное преимущество тезисов: они незаменимы для подготовки глубокой и всесторонней аргументации письменной работы любой сложности, а также для подготовки выступлений на защите, докладов и пр.

Аннотация–краткое изложение основного содержания исходного источника информации, дающее о нем обобщенное представление.

К написанию аннотаций прибегают в тех случаях, когда подлинная ценность и пригодность исходного источника информации исполнителю письменной работы окончательно неясна, но в то же время о нем необходимо оставить краткую запись с обобщающей характеристикой. Для указанной цели и используется аннотация.

Характерной особенностью аннотации наряду с краткостью и обобщенностью ее содержания является и то, что пишется аннотация всегда после того, как (хотя бы в предварительном порядке) завершено ознакомление с содержанием исходного источника информации. Кроме того, пишется аннотация почти исключительно своими словами и лишь в крайне редких случаях содержит в себе небольшие выдержки оригинального текста.

Резюме–краткая оценка изученного содержания исходного источника информации, полученная, прежде всего, на основе содержащихся в нем выводов.

Резюме весьма сходно по своей сути с аннотацией. Однако, в отличие от последней, текст резюме концентрирует в себе данные не из основного содержания исходного источника информации, а из его заключительной части, прежде всего выводов.

Но, как и в случае с аннотацией, резюме излагается своими словами –выдержки из оригинального текста в нем практически не встречаются.

Конспект–сложная запись содержания исходного текста, включающая в себя заимствования (цитаты) наиболее примечательных мест в сочетании с планом источника, а также сжатый анализ записанного материала и выводы по нему.

Для работы над конспектом следует: определить структуру конспектируемого материала, чему в значительной мере способствует письменное ведение плана по ходу изучения оригинального текста; в соответствии со структурой конспекта произвести отбор и последующую запись наиболее существенного содержания оригинального текста — в форме цитат или в изложении, близком к оригиналу; выполнить анализ записей и на его основе –дополнение записей собственными замечаниями, соображениями, "фактурой", заимствованной из других источников и т. п. (располагать все это следует на полях тетради для записей или на отдельных листах-вкладках);завершить формулирование и запись выводов по каждой из частей оригинального текста, а также общих выводов

Систематизация изученных источников позволяет повысить эффективность их анализа и обобщения. Итогом этой работы должна стать логически выстроенная система сведений по существу исследуемого вопроса.

Необходимо из всего материала выделить существующие точки зрения на проблему, проанализировать их, сравнить, дать им оценку.

Кстати, этой процедуре должны подвергаться и материалы из Интернета во избежание механического скачивания готовых текстов. В записях и конспектах студенту очень важно указывать названия источников, авторов, год издания. Это организует его, а главное, пригодится в последующем обучении. Безусловно, студент должен взять за правило активно работать с литературой в библиотеке не только СКСЭиП, но и в других библиотеках, используя, в том числе, их компьютерные возможности (электронная библиотека в сети Интернет).

7.2.2. Методические рекомендации по подготовке к контрольным работам, зачетам, экзаменам

Приступая к изучению новой учебной дисциплины, студенты должны ознакомиться с учебной программой, учебной, научной и методической литературой, имеющейся в библиотеке СКСЭиП, получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

Помимо учебной, научной литературы студентами должны активно использоваться хрестоматии –сборники текстов, иллюстрирующих содержание учебника, а также словари, справочники. В хрестоматиях собраны материалы, которые позволяют расширить кругозор. При подготовке к занятиям, зачетам, экзаменам следует в полной мере использовать академический курс учебника, рекомендованного преподавателем. Они дают более углубленное представление о проблемах, получивших систематическое изложение в учебнике. Работа с хрестоматией позволит студенту самостоятельно изучить документы, фрагменты источников, другие произведения, разъясняющие сущность изучаемого вопроса.

Студентам рекомендуется самостоятельно выполнять доклады, индивидуальные письменные задания и упражнения, предлагаемые при подготовке к занятиям. Работа, связанная с решением этих задач и упражнений, представляет собой вид интеллектуальной практической деятельности. Она способствует выработке умения и привычки делать что-либо правильно, а также закреплению навыков и знаний по проблеме.

Доклад –это вид самостоятельной работы студентов, заключающийся в разработке студентами темы на основе изучения литературы и развернутом публичном сообщении по данной проблеме.

Отличительными признаками доклада являются:

-передача в устной форме информации;

-публичный характер выступления;

-стилевая однородность доклада;

-четкие формулировки и сотрудничество докладчика и аудитории;

-умение в сжатой форме изложить ключевые положения исследуемого вопроса и сделать выводы.

В ходе самостоятельной подготовки к семинарским занятиям, особенно по гуманитарным дисциплинам, студентами может использоваться, к примеру, так называемый метод контрфактического моделирования событий, который научит их самостоятельно рассуждать о минувших, а также современных событиях, покажет мотивы принятия людьми решений, причины совершенных ошибок.

Такая работа, в процессе которой студенту приходится сравнивать, сопоставлять, выявлять логические связи и отношения, применять методы анализа и синтеза, позволит успешно в дальнейшем подготовиться к зачетам, экзаменам и тестированию. Тестирование ориентировано в целом на проверку блоков проблем, способствует систематизации изученного материала, проверке качества его усвоения.

Серьезная и методически грамотно организованная работа по подготовке к семинарским занятиям, написанию письменных работ значительно облегчит подготовку к экзаменам и зачетам. Основными функциями экзамена, зачета являются: обучающая, оценочная и воспитательная. Экзамены и зачеты позволяют выработать ответственность, трудолюбие, принципиальность. При подготовке к зачету, экзамену студент повторяет, как правило, ранее изученный материал. В этот период сыграют большую роль правильно подготовленные заранее записи и конспекты.

Студенту останется лишь повторить пройденное, учесть, что было пропущено, восполнить пробелы при подготовке к семинарам, закрепить ранее изученный материал.

7.2.3. Методические рекомендации по написанию письменных, научно-исследовательских работ студентов

Написание письменных научно -исследовательских работ студентов решает ряд задач:

-обучение студентов самостоятельному поиску и отбору учебной и специальной научной литературы по предмету;

-привитие навыков реферирования научных статей по проблематике изучаемых дисциплин;

-выработка умения подготовки рефератов, докладов, выступлений и сообщений;

-приобретение опыта выступления с докладами

-систематизация, закрепление и расширение теоретических и практических знаний и навыков по изучаемым дисциплинам;

-приобщение студентов к решению проблемных вопросов по избранной теме работы;

-обучение студентов излагать материал в виде стройной системы теоретических положений, связанных логической последовательностью и подкрепленных примерами из практики.

Участие студентов в научно-исследовательской работе

Участие в научной работе позволяет студентам реализовать творческий потенциал в процессе учебы в колледже. Их вклад в научно-исследовательскую деятельность может выражаться в самых разнообразных формах: выполнение курсовых работ и дипломных проектов в форме НИР; производственная и др.

В общем виде НИР студентов (НИРС) состоит из следующих элементов:

-работа в научных кружках;

-участие в конкурсах научных работ;

-участие в выставках научных работ;

-участие в студенческих конференциях;

-подготовка студенческих публикаций.

Процесс обучения способствует развитию у студентов задатков к научным исследованиям – памяти, наблюдательности, воображения, самостоятельности суждений и выводов. Каждый из перечисленных компонентов необходим для самостоятельной исследовательской работы.

Наряду с выполнением научных исследований студенты принимают участие в сборе и обработке статистических данных, составлении и подготовке различной компьютерной продукции. Результаты научных исследований студенты представляют на конференциях, научных семинарах и т.д.

Лучшие студенты по результатам НИРС могут быть рекомендованы для учебы в ВУЗе.

Наиболее распространенной формой НИРС является участие в научных конференциях. При подготовке к докладу или выступлению на конференции студент получает опыт систематизации и обобщения материала, приобретает навыки научного творчества и, наконец, овладевает очень важным искусством публичного выступления, аргументированной полемики.

В этой связи необходимо запомнить несколько правил, характеризующих культуру полемики, дискуссии.

Дискуссия -это соревнование интеллектов, здесь оружие –аргументы.

Необходимо найти надежные аргументы в пользу своей точки зрения и проверять имеющиеся на надежность. Не недооценивайте оппонента. Самыми ценными являются документальные аргументы, ссылки на документы и надежно установленные факты, противоречащие утверждению оппонента.

Следует тщательно проанализировать свои аргументы; пофантазируйте над тем, что можно им противопоставить и как можно их повернуть.

Дискуссия похожа на игру в шахматы: и там и тут очень важно предвидеть возможное развитие событий, только события –ходы заменены более сложными событиями -аргументами, а правила движения фигур –правилами логического мышления.

Необходимо строго следовать логике.

Вкупе с надежными аргументами она обеспечит вам победу. Любой логический промах может быть использован оппонентом, чтобы поставить под сомнение всю вашу конструкцию! Побеждая в дискуссии, следует быть великодушным. Ваши оппоненты не единственные, кто придерживается этой точки зрения, так им легче будет пережить горечь поражения.

Выступление с докладом и публикации материалов позволят студентам приобрести к тому же общественное признание в среде профессионалов –преподавателей колледжа, других вузов, представителей общественности.

7.2.4 Методические рекомендации по работе над рефератом

Реферат – краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним.

Современные требования к реферату –точность и объективность в передаче сведений, полнота отображения основных элементов как по содержанию, так и по форме.

Цель реферата - не только сообщить о содержании реферируемой работы, но и дать представление о вновь возникших проблемах соответствующей отрасли науки.

В учебном процессе реферат представляет собой краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п.

Иначе говоря, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Рефераты в рамках учебного процесса в вузе оцениваются по следующим основным критериями:

-актуальность содержания, высокий теоретический уровень, глубина и полнота анализа фактов, явлений, проблем, относящихся к теме;

-информационная насыщенность, новизна, оригинальность изложения вопросов;

-простота и доходчивость изложения;

-структурная организованность, логичность, грамматическая правильность и стилистическая выразительность;

-убедительность, аргументированность, практическая значимость и теоретическая обоснованность предложений и выводов.

Составление списка использованной литературы.

В соответствии с требованиями, предъявляемыми к реферату, докладу, необходимо составить список литературы, использованной в работе над ним.

<u>Основные этапы работы над рефератом</u>

В организационном плане написание реферата -процесс, распределенный во времени по этапам. Все этапы работы могут быть сгруппированы в три основные: подготовительный, исполнительский и заключительный.

Подготовительный этап включает в себя поиски литературы по определенной теме с использованием различных библиографических источников; выбор литературы в конкретной библиотеке; определение круга справочных пособий для последующей работы по теме.

Исполнительский этап включает в себя чтение книг (других источников), ведение записей прочитанного.

Заключительный этап включает в себя обработку имеющихся материалов и написание реферата, составление списка использованной литературы.

<u>Написание реферата.</u>

Определен список литературы по теме реферата.

Изучена история вопроса по различным источникам, составлены выписки, справки, планы, тезисы, конспекты. Первоначальная задача данного этапа -систематизация и переработка знаний. Систематизировать полученный материал -значит привести его в определенный порядок, который соответствовал бы намеченному плану работы.

Структура реферата

Введение

Введение -это вступительная часть реферата, предваряющая текст. Оно должно содержать следующие элементы:

а) очень краткий анализ научных, экспериментальных или практических достижений в той области, которой посвящен реферат;

б) общий обзор опубликованных работ, рассматриваемых в реферате;

в) цель данной работы;

г) задачи, требующие решения.

Объем введения при объеме реферата 10-15 может составлять одну страницу.

Основная часть.

В основной части реферата студент дает письменное изложение материала по предложенному плану, используя материал из источников. В этом разделе работы формулируются основные понятия, их содержание, подходы к анализу, существующие в литературе, точки зрения на суть проблемы, ее характеристики. В соответствии с поставленной задачей делаются выводы и обобщения. Очень важно не повторять, не копировать стиль источников, а выработать свой собственный, который соответствует характеру реферируемого материала.

Заключение

Заключение подводит итог работы. Оно может включать повтор основных тезисов работы, чтобы акцентировать на них внимание читателей (слушателей), содержать общий вывод, к которому пришел автор реферата, предложения по дальнейшей научной разработке вопроса и т.п. Здесь уже никакие конкретные случаи, факты, цифры не анализируются.

Заключение по объему, как правило, должно быть меньше введения.

Список использованных источников

В строго алфавитном порядке размещаются все источники, независимо от формы и содержания: официальные материалы, монографии и энциклопедии, книги и документы, журналы, брошюры и газетные статьи.

Список использованных источников оформляется в той же последовательности, которая указана в требованиях к оформлению рефератов, курсовых, дипломных работ.

Порядок сдачи и защиты рефератов.

1. Реферат сдается на проверку преподавателю за 1-2 недели до зачетного занятия.
2. При защите реферата преподаватель учитывает:
   - качество
   - степень самостоятельности студента и проявленную инициативу
   - связность, логичность и грамотность составления
   - оформление в соответствии с требованиями ГОСТ.
3. Защита тематического реферата может проводиться на выделенном одном занятии в рамках часов учебной дисциплины или конференции или по одному реферату при изучении соответствующей темы, либо по договоренности с преподавателем.
4. Защита реферата студентом предусматривает

•доклад по реферату не более 5-7 минут

•ответы на вопросы оппонента.

На защите запрещено чтение текста реферата.

Требования к оформлению рефератов, курсовых, дипломных работ

Работа должна быть выполнена с помощью ПК через 1,5 интервала. Тексты работ печатают с соблюдением размеров полей: справа не менее 2 см, слева 3 см, снизу, сверху –2 см, размер шрифта TimesNewRoman–14.

Главы и параграфы курсовой и дипломной работ (проектов) нумеруются арабскими цифрами. Рядом с номером подраздела проставляется и номер раздела, они при этом разделяются между собой точкой, например, 2.1 (первый параграф, второй раздел). Слово «раздел» можно и не писать, введение и заключение не нумеруются. Номер соответствующего раздела или подраздела ставится в начале заголовка. Каждый раздел работы должен начинаться с нового листа, а новые подразделы продолжаются на той же странице, на которой закончен предыдущий подраздел. Заголовки глав печатаются прописными буквами по центру, заголовки подразделов -строчными. Если заголовок включает несколько предложений, то их разделяют точками. Переносы слов в заголовках не допускаются. В конце заголовка точки не ставятся. Полужирный шрифт не используется.

Расстояние между заголовками и текстом должно быть в одну пустую строку. Абзацы начинаются отступами в 1,5 см.

Страницы нумеруются арабскими цифрами, нумерация страниц должна быть сквозной. Титульный лист включается в общую нумерацию, однако номер на нем не ставится. Иллюстрации и таблицы, расположенные на отдельных листах, а также все приложения включают в общую нумерацию страниц работы. Номер страницы проставляется вверху посередине.

Иллюстрации (графики, схемы, диаграммы) располагаются непосредственно после текста, в котором они упоминаются впервые, или на следующей странице. Все иллюстрации обозначаются словом «Рисунок» и в тексте на них делаются ссылки. Иллюстрации нумеруются арабскими цифрами или двумя цифрами (напр. 2.1), где 1-я цифра указывает номер главы, 2-я –номер рисунка, но сквозной нумерацией в пределах всей работы.

Если ссылки приводятся в конце страницы, используются знаки сносок, как правило, цифры, в том месте, где заканчивается мысль автора. Например, в тексте: Речевой период, который некоторые называют синтаксической конструкцией, создается по принципу кругообразно замыкающихся и ритмически организованных частей[1].

В сноске:

[1]Ефимов А.И. О мастерстве речи пропагандиста. -М., 1997. Изд-во Юрайт, с. 42.

Цифровой материал рекомендуется оформлять в виде таблиц, каждую из которых размещают после упоминания о ней. Таблица должна иметь номер (арабскими цифрами) и заголовок, написанный с заглавной буквы.

Слово «Таблица» помещается с красной строки с номером, затем ставится пробел, тире, пробел и заголовок таблицы с прописной буквы без кавычек.

Тексты желательно иллюстрировать графиками, диаграммами, рисунками. При ссылке на таблицы и рисунки указывают их полный номер.

Список использованных источников оформляется в определенной последовательности. Вначале приводятся: 1. Федеральные законы, указы Президента РФ, постановления Правительства РФ, нормативные материалы, изданные органами власти и управления различных уровней. 2. Монографии, научные сборники, журнальные статьи в алфавитном порядке, с указанием ф.и.о. авторов; названия; года издания; издательства; номеров журналов, номеров страниц начала и окончания статьи. Для научной и учебной литературы –общее число страниц.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основные источники:

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика М.:Высшая школа, 2007. – 480 с
2. Максимова О.В. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб.пособие для студентов ССУЗ – 2 изд. – М.: «Дашков и К», 2007, 320 с.
3. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений СПО / М.С. Спирина, П.А.Спирин. – М.: «Академия»,2007,352с

Дополнительные источники:

8. Вентцель Е.С. Теория вероятностей учебное пособие для ССУЗ. - М.: Академия, 2003, 332 с
9. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Задачи и упражнения по теории вероятностей - М.: Академия, 2005. - 448 с.
10. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика - М., Высш.шк., 2003.- 479 с.
11. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М., Высш.шк., 2004.- 404 с.
12. Калинина В.Н. Математическая статистика: Учеб. для студ. сред. спец. учеб. заведений. / Калинина В.Н., Панкин В.Ф. – 3-е изд., испр. –М: Высш. шк., 2001. – 336 с.
13. Кочетков В. Теория вероятностей и математическая статистика учебное пособие для ССУЗ. - М.: ФОРУМ - ИНФРА - М, 2003, 404 с.
14. Теория вероятностей в задачах и упражнениях / Е. С. Кочетков, С. О. Смерчинская. - Москва : Форум - Инфра-М, 2005. - 479 с.

Интернет – ресурсы:

8. http://www.intuit.ru/department/mathematics/intprobtheory/
9. http://www.intuit.ru/department/mathematics/appstat/
10. http://www.intuit.ru/department/economics/basicstat/
11. http://www.matburo.ru/st_subject.php?p=tv
12. http://teorver-online.narod.ru/tvms-i.html
13. http://www.pm298.ru/verstat.php
14. http://www.uchites.ru/tvims/bazovyi_kurs